# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXX. BAND ERSTES HEFT 1961

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 9. Januar 1961
*Postverlagsort Berlin*

*Preis DM 12,80*

Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.



SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30
Fernsprecher 2 79 01 / Fernschreib-Nr. 04 — 61 723

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01 / Fernschreib-Nr. 01 — 83 319

---

## Inhalt:

# INGENIEUR-ARCHIV

XXX. BAND — ERSTES HEFT — 1961



## Die Grundgleichungen für den Verbund bei Stahlbeton-Rechteckplatten

Von R. Trostel

**1. Einleitung.** Die größeren Schwierigkeiten, die bei der Untersuchung des Plattenverbundes gegenüber dem Problem des Trägerverbundes auftreten, sind im wesentlichen dieselben, die die Theorie der elastischen Platten von der gewöhnlichen Balkentheorie unterscheiden. Die grundsätzliche statische Unbestimmtheit des Plattenproblems zwingt auch im vorliegenden Falle, den Lösungsweg über Verschiebungsgleichungen zu suchen[1]. Dabei gehen wir ebenso wie in der Theorie elastischer Platten vor, wo wir vermöge geeigneter Verformungsannahmen letztlich auf Verschiebungsgleichungen für die Mittelflächenverformungen geführt werden. Erst nach Kenntnis des Verschiebungszustandes können wir die am Verbundelement wirkenden Gesamtschnittlasten berechnen, die wir nun noch im Sinne von *Sattler*[2] für eine Spannungsberechnung auf die jeweils auf den Beton- bzw. Stahlquerschnitt entfallenden Anteile (Verteilungsgrößen, Umlagerungsgrößen) aufzuschlüsseln haben.

In den nachfolgenden Untersuchungen, die sich in Abschnitt 3 auf den elastischen Anfangszustand und in Abschnitt 4 auf zeitlich beliebig veränderliche Vorgänge mit Berücksichtigung des Maxwellschen Materialverhaltens des Betons beziehen, werden zunächst die am Verbundelement wirkenden Gesamtschnittlasten bzw. die Teilschnittlasten in Abhängigkeit der Plattenverzerrungen (Dehnungen u. Krümmungen der Mittelfläche bzw. geeigneter Schwerebenen) ausgedrückt. Nach Elimination der Verzerrungen folgen damit Beziehungen zwischen den Teilschnittlasten und den Gesamtschnittlasten. Für die Bestimmung der Gesamtschnittlasten stehen die Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement zur Verfügung, aus denen wir dann letztlich die Verschiebungsgleichungen des Problems folgern können. Um die Rechnung nicht unnötig zu komplizieren und die Anzahl der ideellen Querschnittskonstanten möglichst klein zu halten, wird die für Stahlbeton ohnehin kleine Querkontraktionszahl vernachlässigt. Als Beispiel schließt in Abschnitt 5 u. a. eine Untersuchung des Dischinger-Effektes bei Stahlbetonplatten an.

Die grundsätzlich mögliche Reduktion des Problems auf drei Verschiebungsgleichungen weist den Weg zur Untersuchung auch anderer Flächentragwerke (Schalen). Auch das Problem vorgespannter Flächentragwerke läßt sich in dieser Weise behandeln.

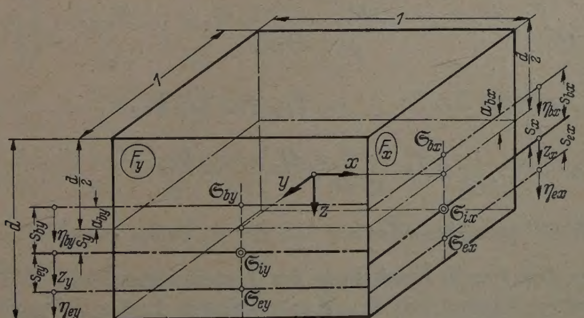

Abb. 1.

**2. Erklärung der verwendeten Bezeichnungen.** Es bedeuten (Abb. 1)

$F_{ex}$ bzw. $F_{ey}$ die in einer Schnittfläche $x=$ konst. bzw. $y=$ konst. (Schnittlänge $\Delta x = \Delta y = 1$) freigelegten Bewehrungsquerschnittflächen,

---

[1] Die im Spezialfall der rotationssymmetrisch belasteten Kreisplatte vom Verfasser, Bautechn. 36/7 (1959) S. 263 ff., angegebene Reduktion des Problems auf eine unbekannte Kraftgröße benutzt zuvor ebenfalls Verformungsannahmen.

[2] *K. Sattler*, Theorie der Verbundkonstruktionen (Spannbeton, Stahlträger in Verband mit Beton), Berlin 1959.

$F_{bx}$ bzw. $F_{by}$ die je Schnittlängeneinheit freigelegten Betonquerschnittflächen, wobei $F_{ex} + F_{bx} = F_x = F_{ey} + F_{by} = F_y = 1$. $d = d$ sind ($d$ = Plattendicke),

$F_{ix}$ bzw. $F_{iy}$ die je Schnittlängeneinheit anfallenden ideellen Gesamtquerschnittflächen, bestehend aus den Betonquerschnitt- und den $n$-fachen Stahlquerschnittflächen ($n = E_e/E_b$), also $F_{ix} = F_{bx} + n\,F_{ex} = d + (n-1)\,F_{ex}$, $F_{iy} = F_{by} + n\,F_{ey} = d + (n-1)\,F_{ey}$,

$\mathfrak{S}_{bx}$ bzw. $\mathfrak{S}_{by}$ die Schwerpunkte der Betonflächen $F_{bx}$ bzw. $F_{by}$,

$\mathfrak{S}_{ex}$ bzw. $\mathfrak{S}_{ey}$ die Schwerpunkte der Stahlquerschnittflächen $F_{ex}$ bzw. $F_{ey}$,

$\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$ die Schwerpunkte der ideellen Gesamtquerschnittflächen $F_{ix}$ bzw. $F_{iy}$,

$\bar{J}_{bx}$ bzw. $\bar{J}_{by}$ die (Eigen-)Trägheitsmonente der Betonflächen $F_{bx}$ bzw. $F_{by}$ hinsichtlich ihrer eigenen Schwerachsen $\mathfrak{S}_{bx}$ bzw. $\mathfrak{S}_{by}$, z. B. $\bar{J}_{bx} = \int\limits_{(F_{bx})} \eta_{bx}^2\,df_x$,

$\bar{J}_{ex}$ bzw. $\bar{J}_{ey}$ die Eigenträgheitsmomente der Stahlquerschnittflächen $F_{ex}$ bzw. $F_{ey}$ hinsichtlich ihrer eigenen Schwerachsen $\mathfrak{S}_{ex}$ bzw. $\mathfrak{S}_{ey}$, z. B. $\bar{J}_{ex} = \int\limits_{(F_{ex})} \eta_{ex}^2\,df_x$,

$J_{ix}$ bzw. $J_{iy}$ die Trägheitsmomente der ideellen Gesamtquerschnittflächen $F_{ix}$ bzw. $F_{iy}$ hinsichtlich ihrer ideellen Schwerachsen $\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$. Es sind

$$J_{i(x,y)} = \bar{J}_{b(x,y)} + n\,\bar{J}_{e(x,y)} + s_{b(x,y)}^2\,F_{b(x,y)} + n\,s_{e(x,y)}^2\,F_{e(x,y)}\,.$$

Dabei bedeuten

$s_{bx}$ bzw. $s_{by}$ die Abstände der Betonquerschnitts-Schwerpunkte $\mathfrak{S}_{bx}$ bzw. $\mathfrak{S}_{by}$ von den ideellen Gesamtquerschnittsschwerpunkten $\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$,

$s_{ex}$ bzw. $s_{ey}$ die entsprechenden Abstände der Stahlquerschnittsschwerpunkte.

Weiterhin sind

$s_x$ bzw. $s_y$ die Abstände der ideellen Gesamtquerschnittschwerpunkte $\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$ von der Plattenmittelfläche $z = 0$,

$z_x$ bzw. $z_y$ plattennormale Ordinaten, gemessen von den jeweiligen Gesamtquerschnittschwerpunkten $\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$ aus, also $z_x = z - s_x$, $z_y = z - s_y$,

$\eta_b$ bzw. $\eta_e$ plattennormale Ordinaten, gemessen von den jeweiligen Beton- bzw. Stahlquerschnittflächenschwerpunkten.

Es gelten noch folgende Identitäten:

$$\left.\begin{aligned}
\int\limits_{(F_{bx})} \eta_{bx}\,df_x = \int\limits_{(F_{by})} \eta_{by}\,df_y = \int\limits_{(F_{ex})} \eta_{ex}\,df_x = \int\limits_{(F_{ey})} \eta_{ey}\,df_y = 0\,,\\
\int\limits_{(F_x)} z_x\,df_{ix} = \int\limits_{(F_{bx})} z_x\,df_x + n \int\limits_{(F_{ex})} z_x\,df_x = 0\,,\\
\int\limits_{(F_y)} z_y\,df_{iy} = \int\limits_{(F_{by})} z_y\,df_y + n \int\limits_{(F_{ey})} z_y\,df_y = 0\,,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{(F_{bx})} z_x\,df_x = -s_{bx}\,F_{bx}\,,\quad \int\limits_{(F_{by})} z_y\,df_y = -s_{by}\,F_{by}\,,\quad \int\limits_{(F_{ex})} z_x\,df_x = s_{ex}\,F_{ex}\,,\quad \int\limits_{(F_{ey})} z_y\,df_y = s_{ey}\,F_{ey}\,,\\
&\text{also}\\
&\qquad s_{bx}\,F_{bx} = n\,s_{ex}\,F_{ex}\,,\qquad s_{by}\,F_{by} = n\,s_{ey}\,F_{ey}\\
&\text{und}\\
&\qquad s_x\,d = -\int\limits_{(F_x)} z_x\,df_x = -\int\limits_{(F_{bx})} z_x\,df_x - \int\limits_{(F_{ex})} z_x\,df_x = s_{bx}\,F_{bx} - s_{ex}\,F_{ex} = (n-1)\,s_{ex}\,F_{ex}\\
&\text{sowie}\qquad s_y\,d = (n-1)\,s_{ey}\,F_{ey}\,.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

**3. Lastverteilung zur Zeit $t = 0$; Ermittlung der Verteilungsgrößen.** Wir betrachten hierfür das in Abb. 2 skizzierte Plattenelement mit den Kantenlängen 1, das die positiven Koordinaten- und Spannungsrichtungen angibt. Die Plattenschnittlasten, worunter wir die „Spannungsresultierenden" je Schnittlängeneinheit verstehen, ergeben sich dann zu

$$n_x = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x\,df_x\,,\qquad n_{xy} = \int\limits_{(F_x)} \tau_{xy}\,df_x\,,\qquad n_{yx} = \int\limits_{(F_y)} \tau_{yx}\,df_y\,,\qquad n_y = \int\limits_{(F_y)} \sigma_y\,df_y\,, \tag{1}$$

$$q_x = \int\limits_{(F_x)} \tau_{xz}\,df_x\,,\qquad q_y = \int\limits_{(F_y)} \tau_{yz}\,df_y\,, \tag{2}$$

$$m_{0x} = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x\,z\,df_x\,,\quad m_{0xy} = \int\limits_{(F_x)} \tau_{xy}\,z\,df_x\,,\quad m_{0yx} = \int\limits_{(F_y)} \tau_{yx}\,z\,df_y\,,\quad m_{0y} = \int\limits_{(F_y)} \sigma_y\,z\,df_y\,. \tag{3a}$$

Die Plattenmomente beziehen sich hierbei jeweils auf eine in der Plattenmittelfläche liegende Achse was der Index 0 zum Ausdruck bringen soll. Als rechentechnisch einfacher erweist es sich aber auch hier, die Momente auf die jeweilige, durch den zugehörigen ideellen Gesamtschwerpunkt $\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$ verlaufende Horizontalachse zu beziehen, also die Plattenmomente in der Form

$$m_{sx} = \int_{(F_x)} \sigma_x z_x \, df_x \,, \qquad m_{sxy} = \int_{(F_x)} \tau_{xy} z_x \, df_x \,, \qquad m_{syx} = \int_{(F_y)} \tau_{yx} z_y \, df_y \,, \qquad m_{sy} = \int_{(F_y)} \sigma_y z_y \, df_y \qquad (3\text{b})$$

zu definieren. Die nach (1), (2) und (3) definierten Schnittlasten sind in ihrer jeweiligen positiven Wirkungsweise in Abb. 3 eingetragen.

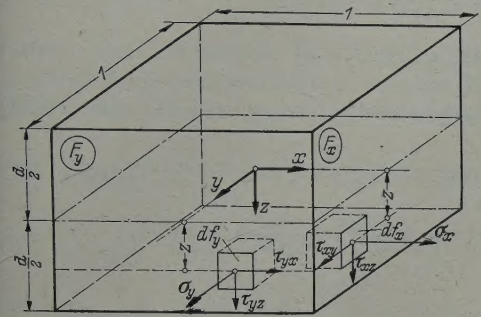

Abb. 2.

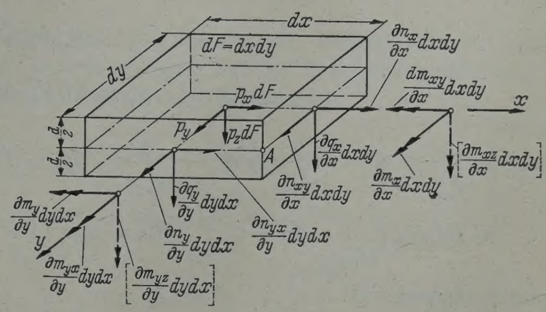

Abb. 3.

Grundlage für die Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den Schnittlasten und den elastischen Verformungen der Platte sind die *Hooke*schen Gesetze sowie die verallgemeinerte *Bernoulli*sche Hypothese, die den Verschiebungszustand der Plattenpunkte letztlich allein auf die gemeinsamen lotrechten Verschiebungen (Biegefläche) und die waagerechten Verschiebungen der Mittelfläche reduziert. Wir setzen für die Komponenten des Verschiebungszustandes mit den lotrechten Verschiebungen $w(x, y)$

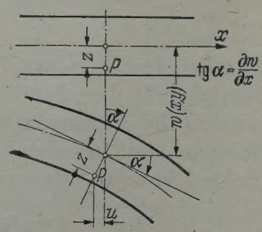

Abb. 4.

in $x$ Richtung: $$u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \,,$$

in $y$ Richtung: $$v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \,.$$

Hierbei stellt der zweite Anteil (Abb. 4) jeweils den Anteil der Biegedeformationen dar, während $u_0(x, y)$ bzw. $v_0(x, y)$ die Verschiebungen der Plattenmittelfläche in $x$- bzw. $y$-Richtung bedeuten. Dann sind

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_{0x} - z \varkappa_x \,, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_{0y} - z \varkappa_y \,, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = \gamma_{0xy} - 2z \varkappa_{xy} \,, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

und aus den *Hooke*schen Gesetzen erhalten wir bei Vernachlässigung der Querkontraktionen die Normal- und Schubspannungen

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E(\varepsilon_{0x} - z\varkappa_x) \,, \qquad \sigma_y = E\varepsilon_y = E(\varepsilon_{0y} - z\varkappa_y) \,, \qquad \tau_{xy} = \frac{E}{2}\gamma_{xy} = \frac{E}{2}(\gamma_{0xy} - 2z\varkappa_{xy}) \,, \qquad (5)$$

wobei für die Betonspannungen $E = E_b$ und im Stahlbereich $E = E_e$ zu setzen ist. Diese Ansätze laufen bei den Normalspannungen im Betonbereich auf die Vernachlässigung der Beton-Querkontraktion hinaus; im Stahlbereich sind sie, sofern wir die Bewehrungslagen $F_{ex}$ und $F_{ey}$ als nicht miteinander fest verbunden ansehen, sogar richtig. Bei den Schubspannungen enthält der gewählte Ansatz im Stahlbereich auch die Vernachlässigung der Stahlquerkontraktionszahl, was wir aber im Hinblick auf die damit verbundene geringere Anzahl ideeller Gesamtquerschnittswerte in Kauf nehmen wollen.

Nach Einsetzen von (4) in (5) erhalten wir nach Integration gemäß (1) bis (3) unter Beachtung der in Abschnitt 2 angeführten Beziehungen die Schnittlast-Verzerrungsrelationen

$$n_x = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x\, df_x = \int\limits_{(F_{bx})} \sigma_x\, df_x + \int\limits_{(F_{ex})} \sigma_x\, df_x = E_b \left[ \int\limits_{(F_{bx})} (\varepsilon_{0x} - z\,\varkappa_x)\, df_x + n \int\limits_{(F_{ex})} (\varepsilon_{0x} - z\,\varkappa_x)\, df_x \right]$$

$$= E_b \left[ \varepsilon_{0x} (F_{bx} + n\, F_{ex}) - \varkappa_x \left( \int\limits_{(F_{bx})} z\, df_x + n \int\limits_{(F_{ex})} z\, df_x \right) \right] = E_b\, F_{ix} (\varepsilon_{0x} - s_x\, \varkappa_x) \tag{6a}$$

und entsprechend[1]

$$n_{xy} = E_b\, F_{ix} \left( \frac{\gamma_{0xy}}{2} - s_x\, \varkappa_{xy} \right), \tag{6b}$$

$$n_{yx} = E_b\, F_{iy} \left( \frac{\gamma_{0xy}}{2} - s_y\, \varkappa_{xy} \right), \tag{6c}$$

$$n_y = E_b\, F_{iy} (\varepsilon_{0y} - s_y\, \varkappa_y), \tag{6d}$$

sowie

$$m_{0x} = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x\, z\, df_x = \int\limits_{(F_{bx})} \sigma_x\, z\, df_x + \int\limits_{(F_{ex})} \sigma_x\, z\, df_x = E_b \left[ \int\limits_{(F_{bx})} (\varepsilon_{0x} - z\,\varkappa_x)\, z\, df_x + n \int\limits_{(F_{ex})} (\varepsilon_{0x} - z\,\varkappa_x)\, z\, df_x \right]$$

$$= E_b \left[ \varepsilon_{0x} \left( \int\limits_{(F_{bx})} z\, df_x + n \int\limits_{(F_{ex})} z\, df_x \right) - \varkappa_x \left( \int\limits_{(F_{bx})} z^2\, df_x + n \int\limits_{(F_{ex})} z^2\, df_x \right) \right] = E_b (F_{ix}\, s_x\, \varepsilon_{0x} - J_{i0x}\, \varkappa_x) \tag{7a}$$

und entsprechend

$$m_{0xy} = E_b \left( F_{ix}\, s_x \frac{\gamma_{0xy}}{2} - J_{i0x}\, \varkappa_{xy} \right), \tag{7b}$$

$$m_{0yx} = E_b \left( F_{iy}\, s_y \frac{\gamma_{0xy}}{2} - J_{i0y}\, \varkappa_{xy} \right), \tag{7c}$$

$$m_{0y} = E_b (F_{iy}\, s_y\, \varepsilon_{0y} - J_{i0y}\, \varkappa_y). \tag{7d}$$

Hierbei sind $J_{i0x}$ bzw. $J_{i0y}$ die Trägheitsmomente der ideellen Gesamtquerschnitte $F_{ix}$ bzw. $F_{iy}$ hinsichtlich der durch die Plattenmittelebene verlaufenden Bezugsachsen. Besonders einfach werden die Zusammenhänge zwischen den Momenten und den Biegeverzerrungen, wenn man die Momente auf die durch die ideellen Gesamtquerschnitts-Schwerpunkte $\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$ verlaufenden Achsen bezieht. Man erhält

$$m_{sx} = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x\, z_x\, df_x = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x (z - s_x)\, df_x = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x\, z\, df_x - s_x \int\limits_{(F_x)} \sigma_x\, df_x = m_{0x} - s_x\, n_x$$

$$= - E_b (J_{i0x} - s_x^2\, F_{ix})\, \varkappa_x = - E_b\, J_{ix}\, \varkappa_x \tag{8a}$$

und entsprechend

$$m_{sxy} = - E_b\, J_{ix}\, \varkappa_{xy}, \qquad m_{syx} = - E_b\, J_{iy}\, \varkappa_{xy}, \qquad m_{sy} = - E_b\, J_{iy}\, \varkappa_y, \tag{8b, c, d}$$

wobei die $J_{ix}$ bzw. $J_{iy}$ die Trägheitsmomente der ideellen Gesamtquerschnittsflächen hinsichtlich ihrer ideellen Schwerachsen $\mathfrak{S}_{ix}$ bzw. $\mathfrak{S}_{iy}$ bedeuten. Auch die Membranschnittlasten können wir in einfacher Weise durch die Membranverzerrungen in den die ideellen Gesamtquerschnittschwerpunkte enthaltenden horizontalen Plattenebenen ausdrücken. Aus (4) erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(s_x)} &= \varepsilon_x|_{z=s_x} = \varepsilon_{0x} - s_x\, \varkappa_x, & \varepsilon_y^{(s_y)} &= \varepsilon_y|_{z=s_y} = \varepsilon_{0y} - s_y\, \varkappa_y, \\ \gamma_{xy}^{(s_x)} &= \gamma_{xy}|_{z=s_x} = \gamma_{0xy} - 2\, s_x\, \varkappa_{xy}, & \gamma_{xy}^{(s_y)} &= \gamma_{xy}|_{z=s_y} = \gamma_{0xy} - 2\, s_y\, \varkappa_{xy} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

und damit aus (6)

$$n_x = E_b\, F_{ix}\, \varepsilon_x^{(s_x)}, \qquad n_{xy} = \frac{E_b}{2} F_{ix}\, \gamma_{xy}^{(s_x)}, \qquad n_{yx} = \frac{E_b}{2} F_{iy}\, \gamma_{xy}^{(s_y)}, \qquad n_y = E_b\, F_{iy}\, \varepsilon_y^{(s_y)}. \tag{10a—d}$$

Für die Ermittlung der Verteilungsgrößen drücken wir nun noch die auf die reinen Beton- bzw. Stahl-Teilquerschnittflächen wirkenden Schnittlasten durch die Membran- und -Biegeverzerrungen der ideellen Gesamtquerschnitte aus. Es ist

$$z = \eta_{bx} - (s_{bx} - s_x) = \eta_{by} - (s_{by} - s_y) = \eta_{ex} + (s_{ex} + s_x) = \eta_{ey} + (s_{ey} + s_y), \tag{11}$$

[1] Die zugeordneten Membranscherkräfte sind also strenggenommen nicht gleichgroß. Siehe hierzu die Ausführungen am Ende dieses Abschnittes.

und damit nach (4) und (9)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} - [\eta_{bx} - (s_{bx} - s_x)]\,\varkappa_x = \varepsilon_{0x} - s_x \varkappa_x - (\eta_{bx} - s_{bx})\,\varkappa_x = \varepsilon_x^{(sx)} - (\eta_{bx} - s_{bx})\,\varkappa_x$$
$$= \varepsilon_x^{(sx)} - (\eta_{ex} + s_{ex})\,\varkappa_x\,, \tag{12a}$$

und entsprechend

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^{(sy)} - (\eta_{by} - s_{by})\,\varkappa_y = \varepsilon_y^{(sy)} - (\eta_{ey} + s_{ey})\,\varkappa_y\,, \tag{12b}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(sx)} - 2\,(\eta_{bx} - s_{bx})\,\varkappa_{xy} = \gamma_{xy}^{(sx)} - 2\,(\eta_{ex} + s_{ex})\,\varkappa_{xy}\,, \tag{12c}$$
$$= \gamma_{xy}^{(sy)} - 2\,(\eta_{by} - s_{by})\,\varkappa_{xy} = \gamma_{xy}^{(sy)} - 2\,(\eta_{ey} + s_{ey})\,\varkappa_{xy}\,. \tag{12d}$$

Mit den *Hooke*schen Gesetzen (5) erhalten wir damit für die auf die Teilquerschnitte wirkenden Membranschnittlasten und die Momente, jeweils bezogen auf die Teilquerschnittschwerpunkte unter Beachtung der Relationen (*a*) und (*b*) schließlich nach Integration,

$$\left.\begin{aligned}
n_{bx} &= \int_{(F_{bx})} \sigma_x\,df_x = E_b F_{bx} (\varepsilon_x^{(sx)} + s_{bx}\varkappa_x)\,, & n_{ex} &= \int_{(F_{ex})} \sigma_x\,df_x = E_e F_{ex} (\varepsilon_x^{(sx)} - s_{ex}\varkappa_x)\,,\\
n_{by} &= \int_{(F_{by})} \sigma_y\,df_y = E_b F_{by} (\varepsilon_y^{(sy)} + s_{by}\varkappa_y)\,, & n_{ey} &= \int_{(F_{ey})} \sigma_y\,df_y = E_e F_{ey} (\varepsilon_y^{(sy)} - s_{ey}\varkappa_y)\,,\\
n_{bxy} &= \int_{(F_{bx})} \tau_{xy}\,df_x = E_b F_{bx}\left(\frac{\gamma_{xy}^{(sx)}}{2} + s_{bx}\varkappa_{xy}\right), & n_{exy} &= \int_{(F_{ex})} \tau_{xy}\,df_x = E_e F_{ex}\left(\frac{\gamma_{xy}^{(sx)}}{2} - s_{ex}\varkappa_{xy}\right),\\
n_{byx} &= \int_{(F_{by})} \tau_{yx}\,df_y = E_b F_{by}\left(\frac{\gamma_{xy}^{(sy)}}{2} + s_{by}\varkappa_{xy}\right), & n_{eyx} &= \int_{(F_{ey})} \tau_{yx}\,df_y = E_e F_{ey}\left(\frac{\gamma_{xy}^{(sy)}}{2} - s_{ey}\varkappa_{xy}\right),\\
m_{bx} &= \int_{(F_{bx})} \sigma_x \eta_{bx}\,df_x = -E_b \bar{J}_{bx}\varkappa_x\,, & m_{ex} &= \int_{(F_{ex})} \sigma_x \eta_{ex}\,df_x = -E_e \bar{J}_{ex}\varkappa_x\,,\\
m_{by} &= \int_{(F_{by})} \sigma_y \eta_{by}\,df_y = -E_b \bar{J}_{by}\varkappa_y\,, & m_{ey} &= \int_{(F_{ey})} \sigma_y \eta_{ey}\,df_y = -E_e \bar{J}_{ey}\varkappa_y\,,\\
m_{bxy} &= \int_{(F_{bx})} \tau_{xy} \eta_{bx}\,df_x = -E_b \bar{J}_{bx}\varkappa_{xy}\,, & m_{exy} &= \int_{(F_{ex})} \tau_{xy} \eta_{ex}\,df_x = -E_e \bar{J}_{ex}\varkappa_{xy}\,,\\
m_{byx} &= \int_{(F_{by})} \tau_{yx} \eta_{by}\,df_y = -E_b \bar{J}_{by}\varkappa_{xy}\,, & m_{eyx} &= \int_{(F_{ey})} \tau_{yx} \eta_{ey}\,df_y = -E_e \bar{J}_{ey}\varkappa_{xy}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

wobei die durch einen Querstrich gekennzeichneten Trägheitsmomente die Eigenträgheitsmomente des Beton bzw. Stahlteiles, jeweils bezogen auf die zugehörige Teilschwerachse bedeuten. Drückt man hierin die Verzerrungsgrößen $\varepsilon$ und $\varkappa$ nach (8) bzw. (10) durch die resultierenden Schnittlasten der Gesamtquerschnittflächen aus, so hat man die Verteilungsgrößen zur Zeit $t = 0$ in Abhängigkeit von den Gesamtschnittlasten ermittelt:

$$\left.\begin{aligned}
n_{bx} &= \frac{F_{bx}}{F_{ix}}\,n_x - \frac{F_{bx}\,s_{bx}}{J_{ix}}\,m_{sx}\,, & n_{ex} &= \frac{n\,F_{ex}}{F_{ix}}\,n_x + \frac{n\,F_{ex}\,s_{ex}}{J_{ix}}\,m_{sx}\,,\\
n_{bxy} &= \frac{F_{bx}}{F_{ix}}\,n_{xy} - \frac{F_{bx}\,s_{bx}}{J_{ix}}\,m_{sxy}\,, & n_{exy} &= \frac{n\,F_{ex}}{F_{ix}}\,n_{xy} + \frac{n\,F_{ex}\,s_{ex}}{J_{ix}}\,m_{sxy}\,,\\
n_{byx} &= \frac{F_{by}}{F_{iy}}\,n_{yx} - \frac{F_{by}\,s_{by}}{J_{iy}}\,m_{syx}\,, & n_{eyx} &= \frac{n\,F_{ey}}{F_{iy}}\,n_{yx} + \frac{n\,F_{ey}\,s_{ey}}{J_{iy}}\,m_{syx}\,,\\
n_{by} &= \frac{F_{by}}{F_{iy}}\,n_y - \frac{F_{by}\,s_{by}}{J_{iy}}\,m_{sy}\,, & n_{ey} &= \frac{n\,F_{ey}}{F_{iy}}\,n_y + \frac{n\,F_{ey}\,s_{ey}}{J_{iy}}\,m_{sy}\,,
\end{aligned}\right.$$
$$\left.\begin{aligned}
m_{bx} &= \frac{\bar{J}_{bx}}{J_{ix}}\,m_{sx}\,, & m_{bxy} &= \frac{\bar{J}_{bx}}{J_{ix}}\,m_{sxy}\,, & m_{byx} &= \frac{\bar{J}_{by}}{J_{iy}}\,m_{syx}\,, & m_{by} &= \frac{\bar{J}_{by}}{J_{iy}}\,m_{sy}\,,\\
m_{ex} &= \frac{n\,\bar{J}_{ex}}{J_{ix}}\,m_{sx}\,, & m_{exy} &= \frac{n\,\bar{J}_{ex}}{J_{ix}}\,m_{sxy}\,, & m_{eyx} &= \frac{n\,\bar{J}_{ey}}{J_{iy}}\,m_{syx}\,, & m_{ey} &= \frac{n\,\bar{J}_{ey}}{J_{iy}}\,m_{sy}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Gesamtschnittlasten der Platte werden dabei nach der Theorie der orthotropen Platten bzw. Scheiben berechnet. Die maßgebenden Gleichungen gewinnen wir, indem wir in die Gleich-

gewichtsbedingungen für das Plattenelement[1] (Abb. 3, hier wurden der Übersichtlichkeit wegen nur die Zuwächse eingetragen)

$$\Sigma K_x = 0: \qquad \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + p_x = 0\,, \tag{15a}$$

$$\Sigma K_y = 0: \qquad \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + p_y = 0\,, \tag{15b}$$

$$\Sigma K_z = 0: \qquad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = 0\,, \tag{15c}$$

$$\Sigma M_{Ax} = 0: \qquad \frac{\partial m_{0xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{0y}}{\partial y} - q_y = 0\,, \tag{15d}$$

$$\Sigma M_{Ay} = 0: \qquad \frac{\partial m_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial m_{0yx}}{\partial y} - q_x = 0 \tag{15e}$$

die Schnittlast-Verzerrungsrelationen (6) bzw. (7) einsetzen, womit wir letztlich drei gekoppelte Differentialgleichungen für die Verschiebungen der Mittelfläche erhalten. Zunächst hat man aus (15d, e)

$$q_x = \frac{\partial m_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial m_{0yx}}{\partial y}\,, \qquad q_y = \frac{\partial m_{0xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_{0y}}{\partial y}\,, \tag{16a, b}$$

so daß nach Einsetzen in (15c)

$$\frac{\partial^2 m_{0x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(m_{0xy} + m_{0yx}) + \frac{\partial^2 m_{0y}}{\partial y^2} + p_z = 0 \tag{16c}$$

entsteht. Mit (7) wird daraus

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[J_{i0x}\varkappa_x] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[(J_{i0x} + J_{i0y})\varkappa_{xy}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[J_{i0y}\varkappa_y]$$
$$= \frac{p_z}{E_b} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[s_x F_{ix}\varepsilon_{0x}] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[(s_x F_{ix} + s_y F_{iy})\frac{\gamma_{0xy}}{2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[s_y F_{iy}\varepsilon_{0y}]\,, \tag{16d}$$

und insbesondere bei konstanten Steifigkeiten

$$J_{i0x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (J_{i0x} + J_{i0y})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + J_{i0y}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$
$$= \frac{p_z}{E_b} + \frac{s_x F_{ix}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta u_0 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right] + \frac{s_y F_{iy}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\Delta v_0 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right]. \tag{16e}$$

Einsetzen der Gleichungen (6) in die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen liefert

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_{ix}\varepsilon_{0x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{iy}\frac{\gamma_{0xy}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(s_x F_{ix}\varkappa_x) - \frac{\partial}{\partial y}(s_y F_{iy}\varkappa_{xy}) + \frac{p_x}{E_b} = 0\,, \tag{17a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{ix}\frac{\gamma_{0xy}}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{iy}\varepsilon_{0y}) - \frac{\partial}{\partial x}(s_x F_{ix}\varkappa_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(s_y F_{iy}\varkappa_y) + \frac{p_y}{E_b} = 0 \tag{17b}$$

und insbesondere bei konstanten Steifigkeiten

$$F_{ix}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{F_{iy}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \frac{p_x}{E_b} - \frac{\partial}{\partial x}\left[s_x F_{ix}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_y F_{iy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0\,, \tag{17c}$$

$$F_{iy}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{F_{ix}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + \frac{p_y}{E_b} - \frac{\partial}{\partial y}\left[s_x F_{ix}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_y F_{iy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0\,. \tag{17d}$$

Wir kommen nun auf die Momentengleichgewichtsbedingung hinsichtlich der Normalachse $z$ und damit auf die Frage der Gleichheit der zugeordneten Membranscherkräfte $n_{xy}$ bzw. $n_{yx}$ zurück. Zur Klärung dieses Sachverhaltes ist es notwendig, die Schubverformungen eines Verbundelementes der Dicke $dz$ (bestehend aus einem Beton- und einem Rundstahlanteil, der angenähert als Rechteckquerschnitt angesehen werden kann) einer genaueren Betrachtung zu unterziehen[2]. In Abb. 5

[1] Die Momentengleichgewichtsbedingung hinsichtlich der $z$-Achse lassen wir zunächst unberücksichtigt.

[2] Mit dieser Schnittführung folgen wir der üblichen Betrachtungsweise, die in der Theorie der dünnen Platten angewendet wird, indem man zur Herleitung der Schnittlast-Verzerrungsrelationen die Spannungen $\sigma_x$, $\sigma_y$ und $\tau_{xy}$ als einen ebenen Spannungszustand bildend ansieht.

ist ein in $x$-Richtung bewehrtes Verbundelement und dessen Schubverzerrung $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ skizziert. Während die im Betonteil entstehenden Schubspannungen auf Grund der konstanten Schubverzerrung $\gamma$ ebenfalls konstant sind und

$$\tau_b = G_b \gamma \approx \frac{E_b}{2} \gamma \tag{18a}$$

betragen, müssen wir im Stahlbereich eine veränderliche Schubverzerrung und damit auch einen veränderlichen Schubspannungsverlauf voraussetzen. Dies zeigt folgende Überlegung.

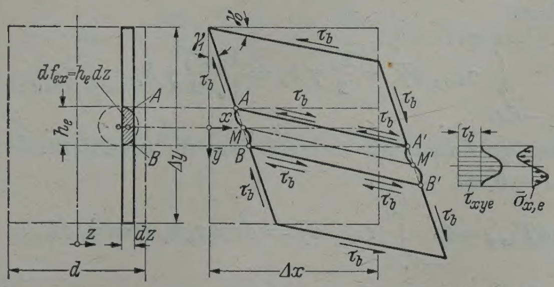

Abb. 5.

Da die Betonspannungen $\tau_b$ längs der Grenzflächen $AA'$ und $BB'$ stetig in den Schubspannungsverlauf $\tau_{exy}$ im Eisen übergehen müssen $(\tau_{eA} = \tau_{eB} = \tau_b)$, andererseits jedoch der Schubmodul $G_e$ des Stahles wesentlich größer als derjenige des Betons ist, sind wegen

$$\gamma_{eA} = \gamma_{eB} = \frac{\tau_{eA}}{G_e} = \frac{\tau_{eB}}{G_e} = \frac{\tau_b}{G_e} < \frac{\tau_b}{G_b} = \gamma$$

die Schubverzerrungen an den Rändern des Eisens kleiner als die benachbarten (konstanten) Betonverzerrungen $\gamma$. Damit jedoch der Verschiebungszustand beim Übergang vom Beton zum Stahlteil längs der Grenzflächen $AA'$ und $BB'$ stetig ist, müssen die geringeren Randschubverzerrungen des Eisens durch größere Schubverzerrungen im Innern des Stahlbereiches ausgeglichen werden. Die gestrichelt in Abb. 5 eingetragene konstante Schubverzerrung ist also im Bereich des Eisens nicht verträglich. Die tatsächlichen Verzerrungen und damit auch die Stahlschubspannungen werden eher den in Abb. 5 durch die ausgezogenen Linien markierten Verlauf haben. Ein mit $\bar{y}$ veränderlicher Schubspannungsverlauf $\tau_{exy}$ fordert jedoch aus Gleichgewichtsgründen am Element bekanntlich die gleichzeitige Wirkung von Normalspannungen $\bar{\sigma}_x$ und $\bar{\sigma}_y$, wobei letztere an den Rändern $AA'$ bzw. $BB'$ verschwinden müssen, da der angrenzende Betonkörper zufolge seiner vorausgesetzten Deformationsfigur allein unter der Schubbelastung $\tau_b$ stehen kann. Hier liegt also ein zweiachsiger Spannungszustand mit den Randbedingungen

1) Rand $AA' \left(\bar{y} = -\frac{h_e}{2}\right)$:

$$\tau_{exy} = \tau_b, \quad \bar{\sigma}_y = 0, \quad u = u_M - \gamma_1 \frac{h_e}{2}, \quad \text{also} \quad \varepsilon_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\sigma}_x = 0, \quad v = v_M + \gamma_0 x,$$

2) Rand $BB' \left(\bar{y} = \frac{h_e}{2}\right)$:

$$\tau_{exy} = \tau_b, \quad \bar{\sigma}_y = 0, \quad u = u_M + \gamma_1 \frac{h_e}{2}, \quad \text{also} \quad \varepsilon_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\sigma}_x = 0, \quad v = v_M + \gamma_0 x$$

vor, und die Aufgabe besteht darin, die an den Rändern $x = 0$ bzw. $x = \Delta x$ aufzubringenden Normal- und Schubspannungen $\bar{\sigma}_{ex}$ und $\tau_{exy}$ zu bestimmen, die die genannten Randbedingungen befriedigen. Die strenge Lösung dieser biharmonischen Randwertaufgabe ist jedoch für die Klärung der Frage nach der Gleichheit der zugeordneten Membrankräfte nicht im Einzelnen notwendig, da wir hierfür lediglich Aussagen für die Spannungsintegrale über die Eisenquerschnittflächen benötigen. Dabei benutzen wir die aus den Randbedingungen hinsichtlich $u$ längs der Ränder $AA'$ und $BB'$ folgende Beziehung:

$$u\left(x, \frac{h_e}{2}\right) - u\left(x, -\frac{h_e}{2}\right) = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} \, d\bar{y} = \gamma_1 h_e, \tag{18b}$$

die wir mit der Näherungsannahme, daß

$$v \approx v_M + \gamma_0 x \tag{18c}$$

innerhalb des gesamten Stahlbereiches sei (was sicherlich eine sehr gute Näherung darstellt, da längs der nahe beieinanderliegenden Ränder $AA'$ und $BB'$ diese Bedingung exakt gilt), in

$$\gamma_1 h_e + \gamma_0 h_e = \gamma h_e = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \gamma_0\right) d\bar{y} \approx \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) d\bar{y} = \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \gamma_{exy}\, d\bar{y} = \frac{2}{E_e} \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \tau_{exy}\, d\bar{y},$$

also mit (18a) schließlich in

$$\int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \tau_{exy}\, d\bar{y} = \frac{E_e}{2} \gamma h_e = \frac{E_e}{E_b} \frac{E_b}{2} \gamma h_e = n \tau_b h_e \tag{18d}$$

überführen können. Damit gewinnen wir einerseits für die resultierende erforderliche Schubkraft im Eisenquerschnitt $df_{ex} = h_e\, dz$

$$dT_{exy} = dz \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \tau_{exy}\, d\bar{y} = dz\, n \tau_b h_e = n \tau_b\, df_{ex}, \tag{19}$$

womit sich zeigt, daß auch hinsichtlich der Schubspannungsverteilung ein Stahlquerschnitt näherungsweise wie ein $n$-facher Betonquerschnitt wirkt, was die Richtigkeit der Formeln (6b, c) und (7b, c) auch unter dem Gesichtspunkt dieser eingehenderen, die *Bernoulli*sche Hypothese im Stahlbereich verlassenden Deformationsbetrachtungen unterstreicht, und andererseits unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{exy}}{\partial \bar{y}} = 0$$

für die infolge der Spannungszuwächse $\frac{\partial \bar{\sigma}_{ex}}{\partial x}$ im Eisenquerschnitt entstehenden Schnittlastzuwächse

$$\frac{\partial}{\partial x}(d\bar{n}_{ex}) = dz \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ex}}{\partial x}\, d\bar{y} = -dz \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \frac{\partial \tau_{exy}}{\partial \bar{y}}\, d\bar{y} = -dz\, [\tau_{exy}]_{-h_e/2}^{+h_e/2}, \tag{20a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(d\bar{m}_{exz}) = -dz \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ex}}{\partial x} \bar{y}\, d\bar{y} = dz \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \frac{\partial \tau_{exy}}{\partial \bar{y}} \bar{y}\, d\bar{y} = dz \left\{ [\bar{y}\, \tau_{exy}]_{-h_e/2}^{+h_e/2} - \int_{-h_e/2}^{+h_e/2} \tau_{exy}\, d\bar{y} \right\}. \tag{20b}$$

Unter Beachtung der Randbedingungen für die Eisenschubspannungen sowie mit (18d) folgt daraus

$$\frac{\partial}{\partial x}(d\bar{n}_{ex}) = -dz\, (\tau_b - \tau_b) = 0, \tag{20c}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(d\bar{m}_{exz}) = dz\, \{\tau_b h_e - n \tau_b h_e\} = -dz\, (n-1) \tau_b h_e = -(n-1) \tau_b\, df_{ex} = -(n-1) \frac{E_b}{2} \gamma\, df_{ex}. \tag{20d}$$

Der die Eisenverformungen erzwingende Spannungszustand längs der Ränder $x = 0$ bzw. $x = \Delta x$ hat dementsprechend die Eigenschaft, daß er neben der nach (19) berechneten Schubkraft in den Eisenquerschnitten resultierend keine Längskraftzuwächse, sondern allein Momentenzuwächse um die $z$-Achse nach (20 d) hervorruft. Mit

$$\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(sx)} - 2\, z_x\, \varkappa_{xy}$$

erhalten wir also für den Momentenzuwachs um die $z$-Achse längs einer Schnittlängeneinheit $\Delta y = 1$

$$\frac{\partial m_{xz}}{\partial x} = -(n-1) \frac{E_b}{2} \int_{(F_{ex})} (\gamma_{xy}^{(sx)} - 2\, z_x\, \varkappa_{xy})\, df_x = -(n-1) \frac{E_b}{2} (\gamma_{xy}^{(sx)} - 2\, s_{ex}\, \varkappa_{xy})\, F_{ex}, \tag{21a}$$

und entsprechend, wenn auch Bewehrungsstähle in der $y$-Richtung liegen,

$$\frac{\partial m_{yz}}{\partial y} = (n-1) \frac{E_b}{2} (\gamma_{xy}^{(sy)} - 2\, s_{ey}\, \varkappa_{xy})\, F_{ey}. \tag{21b}$$

Die vorausgesetzte Verzerrungsfigur nach Abb. 5 ist also allein durch Schubspannungen bzw. Scherkräfte nicht realisierbar, sondern nur bei zusätzlicher Wirkung von Momenten um die

$z$-Achse, die auf die einzelnen Bewehrungsstähle wirken. Unter diesem Gesichtspunkt lautet die Momentengleichgewichtsbedingung

$$\Sigma M_{A z} = 0$$

für das Plattenelement von Abb. 3 unter Hinzunahme der gestrichelt eingetragenen Momentenzuwächse um die $z$-Achse

$$(n_{xy}\, dy)\, dx - (n_{yx}\, dx)\, dy + \left(\frac{\partial m_{xz}}{\partial x}\, dx\right) dy + \left(\frac{\partial m_{yz}}{\partial y}\, dy\right) dx = 0\,,$$

also

$$n_{xy} + \frac{\partial m_{xz}}{\partial x} - \left(n_{yx} - \frac{\partial m_{yz}}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Mit (10b, c) und (21a, b) erhält man daraus

$$\frac{E_b}{2}\,\gamma_{xy}^{(s_x)}\,[F_{ix} - (n-1)\,F_{ex}] - \frac{E_b}{2}\,\gamma_{xy}^{(s_y)}\,[F_{iy} - (n-1)\,F_{ey}] + (n-1)\,E_b\,\varkappa_{xy}\,(s_{ex}\,F_{ex} - s_{ey}\,F_{ey}) = 0\,,$$

also mit

$$F_{ix} - (n-1)\,F_{ex} = F_{bx} + n\,F_{ex} - (n-1)\,F_{ex} = F_{bx} + F_{ex} = d = F_{iy} - (n-1)\,F_{ey}$$

und

$$(n-1)\,s_{ex}\,F_{ex} = s_x\,d \qquad \text{bzw.} \qquad (n-1)\,s_{ey}\,F_{ey} = s_y\,d$$

nach (b) schließlich

$$\frac{1}{2}\,(\gamma_{xy}^{(s_x)} - \gamma_{xy}^{(s_y)}) + \varkappa_{xy}\,(s_x - s_y) = 0\,.$$

Beachtet man hierin noch (9), so erkennt man, daß diese Gleichgewichtsbedingung identisch erfüllt wird, ohne die Gleichheit der zugeordneten Membranscherkräfte bzw. Torsionsmomente fordern zu müssen. Im allgemeinen wird man die zugeordneten Größen jedoch gleich setzen, da die Unterschiede insbesondere bei schwächerer Bewehrung vernachlässigbar klein sind.

**4. Die zeitabhängigen Vorgänge (Ermittlung der Umlagerungsgrößen).** a) Allgemeines. Die Lösung des zeitabhängigen Problems wird grundsätzlich analog den Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes 3 aufgebaut. Nach Formulierung des maßgebenden Spannungs-Verzerrungs-Gesetzes (analog den *Hooke*schen Gesetzen (5)) kommen wir, wiederum unter Heranziehung der verallgemeinerten *Bernoulli*schen Hypothese (4) nach Integration über die Gesamtquerschnittflächen [analog Formel (6), (7), (8), (10)] zu den Zusammenhängen zwischen den (hier allgemein zeitlich langsam veränderlich vorausgesetzten) Gesamtschnittlasten und den (nunmehr ebenfalls zeitlich veränderlichen) Plattenverzerrungen $\varepsilon$ und $\varkappa$. Weiterhin werden auch durch entsprechende Integrationen über die Teilquerschnittflächen [analog (13)] die Zusammenhänge zwischen den Teilschnittlasten und den Plattenverzerrungen ermittelt, so daß man dann [analog (14)] durch Kombination der bei diesen Schritten gefundenen Beziehungen endgültig einen Zusammenhang zwischen den Teilschnittlasten und den (zeitlich veränderlichen) Gesamtschnittlasten erhält. Nach Abspaltung der Verteilungsgrößen verbleiben dann allgemeine Ausdrücke für die Umlagerungsgrößen.

Für die zeitlich veränderlichen Plattenverzerrungen $\varepsilon$ bzw. $\varkappa$, auf die sich das Problem letztlich zurückführen läßt, werden dann wiederum aus den Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement [(15), (16), (17)] entsprechende Beziehungen gewonnen, die sich jedoch nun als ein System dreier gekoppelter partieller Integro-Differentialgleichungen repräsentieren. Sie lassen sich auf ein System dreier simultaner partieller Differentialgleichungen reduzieren.

Da der Beton neben den elastischen Verformungen zu Belastungsbeginn durch das Kriechen und Schwinden auch zeitabhängige Verformungen erleidet, müssen wir anstelle der Spannungs-Verzerrungsgesetze (5) im Betonbereich das durch die Kriech- und Schwindverformungen verallgemeinerte Gesetz[1]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{bx}(\varphi) &= \frac{\sigma_{bx}(0)}{E_b}\,(1+\varphi) + \frac{1}{E_b}\int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \frac{\partial \sigma_{bx}}{\partial \chi}\,(1+\varphi-\chi)\,d\chi - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}\,\varphi \\ &= \frac{1}{E_b}\left[\sigma_{bx}(\varphi) + \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \sigma_{bx}(\chi)\,d\chi\right] - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}\,\varphi = \frac{e^{-\varphi}}{E_b}\,\frac{d}{d\varphi}\left(e^{\varphi}\int\limits_0^{\varphi} \sigma_{bx}\,d\chi\right) - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}\,\varphi \end{aligned} \tag{22a}$$

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 1.

heranziehen, wobei $\varepsilon_{s\infty}$ bzw. $\varphi_\infty$ die Endwerte der Schwindverkürzung bzw. der Kriechzahl $\varphi$ bedeuten. Zur Auflösung von (22a) nach $\sigma_{bx}(\varphi)$ differentiieren wir zunächst nach $\varphi$, womit die Differentialgleichung

$$\frac{d\sigma_{bx}}{d\varphi} + \sigma_{bx}(\varphi) = e^{-\varphi} \frac{d}{d\varphi} (\sigma_{bx} e^{\varphi}) = E_b \frac{d}{d\varphi}\left[\varepsilon_{bx}(\varphi) + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \varphi\right]$$

entsteht, deren Lösung mit der Integrationskonstanten $C$

$$\sigma_{bx}(\varphi) = E_b\left[\varepsilon_{bx}(\varphi) + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} - e^{-\varphi} \int \varepsilon_{bx}(\varphi)\, e^{\varphi}\, d\varphi\right] + C e^{-\varphi}$$

lautet. Einsetzen in die ursprüngliche Integralgleichung (22a) liefert für die Integrationskonstante

$$C = -E_b \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} + E_b\left[\int \varepsilon_{bx}(\varphi)\, e^{\varphi}\, d\varphi\right]_{\varphi=0},$$

so daß wir letztlich

$$\sigma_{bx}(\varphi) = E_b\left[\varepsilon_{bx}(\varphi) - e^{-\varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\, \varepsilon_{bx}(\chi)\, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\right] \tag{22b}$$

erhalten. Anstelle der *Hooke*schen Gesetze (5) benutzen wir dementsprechend im Betonbereich die SpannungsVerzerrungsrelationen [1]

$$\sigma_x = E_b\left[\varepsilon_x - e^{-\varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\, \varepsilon_x\, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\right], \tag{23a}$$

$$\sigma_y = E_b\left[\varepsilon_y - e^{-\varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\, \varepsilon_y\, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\right], \tag{23b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E_b}{2}\left[\gamma_{xy} - e^{-\varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\, \gamma_{xy}\, d\chi\right], \tag{23c}$$

im Stahlbereich bleiben die *Hooke*schen Gesetze erhalten:

$$\sigma_x = E_e \varepsilon_x, \qquad \sigma_y = E_e \varepsilon_y, \qquad \tau_{xy} = \frac{E_e}{2} \gamma_{xy}. \tag{23d—f}$$

Sämtliche Verzerrungen lassen sich dabei wieder, da wir auch für die zeitabhängigen Vorgänge die verallgemeinerte *Bernoulli*sche Hypothese voraussetzen, durch die Membranverzerrungen in den, die ideellen Gesamtquerschnitts-Schwerpunkte enthaltenden horizontalen Plattenebenen bzw. durch deren Krümmungen z. B. nach (12) ausdrücken.

b) Zusammenhang zwischen den Gesamtschnittlasten und den Plattenverzerrungen. Indem wir nach (1) bzw. (3b) durch Integration über die Gesamtquerschnittflächen aus den Spannungen wieder die Plattenschnittlasten berechnen, gewinnen wir letztlich nach Einsetzen von (23a—c) für den Betonbereich bzw. mit den *Hooke*schen Gesetzen (23d—f) im Stahlbereich einen Zusammenhang zwischen den Gesamtschnittlasten und den Plattenverzerrungen $\varkappa$ bzw. $\varepsilon$. Man erhält

$$n_x = \int_{(F_x)} \sigma_x\, df_x = \int_{(F_{bx})} \sigma_x\, df_x + \int_{(F_{ex})} \sigma_x\, df_x = E_b\left\{\int_{(F_{bx})}\left[\varepsilon_x - e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} e^{\chi} \varepsilon_x\, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\right] df_x + n \int_{(F_{ex})} \varepsilon_x\, df_x\right\},$$

und mit $\varepsilon_x$ nach (12a) unter Beachtung von (a) und (b)

$$n_x = E_b\left\{\varepsilon_x^{(s_x)} F_{ix} - F_{bx}\left[e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} e^{\chi} (\varepsilon_x^{(s_x)} + s_{bx} \varkappa_x)\, d\chi - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\right]\right\}, \tag{24a}$$

also entsprechend

$$n_{xy} = E_b\left\{\frac{\gamma_{xy}^{(s_x)}}{2} F_{ix} - F_{bx}\, e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} e^{\chi}\left(\frac{\gamma_{xy}^{(s_x)}}{2} + s_{bx} \varkappa_{xy}\right) d\chi\right\}, \tag{24b}$$

$$n_{yx} = E_b\left\{\frac{\gamma_{xy}^{(s_y)}}{2} F_{iy} - F_{by}\, e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} e^{\chi}\left(\frac{\gamma_{xy}^{(s_y)}}{2} + s_{by} \varkappa_{xy}\right) d\chi\right\}, \tag{24c}$$

$$n_y = E_b\left\{\varepsilon_y^{(s_y)} F_{iy} - F_{by}\left[e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} e^{\chi} (\varepsilon_y^{(s_y)} + s_{by} \varkappa_y)\, d\chi - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\right]\right\}, \tag{24d}$$

[1] In (23c) entfällt der Schwind-Einfluß, da ein homogener Betonkörper unter alleinigem Einfluß des Schwindens keine Schubverzerrungen erleidet.

sowie

$$m_{s\,x} = \int\limits_{(F_x)} \sigma_x z_x \, df_x = \int\limits_{(F_{b\,x})} \sigma_x z_x \, df_x + \int\limits_{(F_{e\,x})} \sigma_x z_x \, df_x$$

$$= E_b \left\{ \int\limits_{(F_{b\,x})} \left[ \varepsilon_x - e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \varepsilon_x \, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) \right] z_x \, df_x + n \int\limits_{(F_{e\,x})} \varepsilon_x z_x \, df_x \right\},$$

und wiederum unter Beachtung von (12a), (a) und (b)

$$m_{s\,x} = -E_b \left\{ J_{i\,x} \varkappa_x - \bar{J}_{b\,x} e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \varkappa_x \, d\chi - s_{b\,x} F_{b\,x} \left[ e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi (\varepsilon_x^{(s_x)} + s_{b\,x} \varkappa_x) \, d\chi - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) \right] \right\}, \tag{25a}$$

also entsprechend

$$m_{s\,x\,y} = -E_b \left\{ J_{i\,x} \varkappa_{x\,y} - \bar{J}_{b\,x} e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \varkappa_{x\,y} \, d\chi - s_{b\,x} F_{b\,x} e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \left( \frac{\gamma_{x\,y}^{(s_x)}}{2} + s_{b\,x} \varkappa_{x\,y} \right) d\chi \right\}, \tag{25b}$$

$$m_{s\,y\,x} = -E_b \left\{ J_{i\,y} \varkappa_{x\,y} - \bar{J}_{b\,y} e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \varkappa_{x\,y} \, d\chi - s_{b\,y} F_{b\,y} e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \left( \frac{\gamma_{x\,y}^{(s_y)}}{2} + s_{b\,y} \varkappa_{x\,y} \right) d\chi \right\}, \tag{25c}$$

$$m_{s\,y} = -E_b \left\{ J_{i\,y} \varkappa_y - \bar{J}_{b\,y} e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \varkappa_y \, d\chi - s_{b\,y} F_{b\,y} \left[ e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi (\varepsilon_y^{(s_y)} + s_{b\,y} \varkappa_y) \, d\chi - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) \right] \right\}. \tag{25d}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den Plattenverzerrungen erfordert die Lösung jeweils zweier gekoppelter Integralgleichungen, da in den jeweiligen Gleichungen [(24a), (25a)], [(24b), (25b)], [(24c), (25c)] und [(24d), (25d)] stets zwei unbekannte Verzerrungsgrößen $\varepsilon$ und $\varkappa$ enthalten sind. Wir betrachten zunächst allein (24a) und (25a), um hieraus die Verzerrungen $\varepsilon_x^{(s_x)}$ und $\varkappa_x$ zu berechnen. Der analoge Aufbau der übrigen Gleichungen erlaubt dann eine Verallgemeinerung der für diesen Fall gefundenen Resultate. Wir multiplizieren zunächst (24a) mit $s_{b\,x}$ und addieren zu (25a). Es entsteht schließlich

$$\varepsilon_x^{(s_x)} = \frac{m_{s\,x}}{E_b \, s_{b\,x} \, F_{i\,x}} + \frac{n_x}{E_b \, F_{i\,x}} + \frac{J_{i\,x}}{s_{b\,x} F_{i\,x}} \varkappa_x - \frac{\bar{J}_{b\,x}}{s_{b\,x} F_{i\,x}} e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} e^\chi \varkappa_x \, d\chi \, . \tag{26}$$

Setzt man dies in (24a) ein, so folgt letztlich eine Integralgleichung zur Berechnung von $\varkappa_x$. Man erhält mit den Abkürzungen

$$\alpha_{e\,x} = \frac{n \, F_{e\,x} \, n \, \bar{J}_{e\,x}}{F_{i\,x} \, J_{i\,x}}, \qquad \alpha_{b\,x} = \frac{F_{b\,x} \, \bar{J}_{b\,x}}{F_{i\,x} \, J_{i\,x}} \tag{27a, b}$$

nach kurzer Zwischenrechnung

$$\varkappa_x - (1 - \alpha_{e\,x} + \alpha_{b\,x}) \, e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \varkappa_x \, d\chi + \alpha_{b\,x} \, e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi \left[ \int\limits_0^\chi e^u \varkappa_x \, du \right] d\chi$$

$$= -\frac{1}{E_b \, J_{i\,x}} \left( m_{s\,x} - \frac{F_{b\,x}}{F_{i\,x}} e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \, m_{s\,x} \, d\chi \right) + \frac{s_{b\,x} \, F_{b\,x}}{E_b \, F_{i\,x} \, J_{i\,x}} \left[ e^{-\varphi} \int\limits_0^\varphi e^\chi \, n_x \, d\chi - \frac{\varepsilon_{s\infty} \, E_b \, F_{i\,x}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) \right] = \psi \, . \tag{27c}$$

Führt man in dieser Gleichung die durch $e^{-\varphi} \dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [e^\varphi(\;)]$ zu beschreibende Operation durch, so gewinnt man schließlich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varkappa_x}{\partial \varphi^2} + (1 + \alpha_{e\,x} - \alpha_{b\,x}) \frac{\partial \varkappa_x}{\partial \varphi} + \alpha_{e\,x} \varkappa_x = e^{-\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (e^\varphi \, \psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \psi = \psi^* \, . \tag{27d}$$

Ihre allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Gleichung von (27d)

$$\varkappa_{x\,H} = C_1 \, e^{\nu_{1\,x} \varphi} + C_2 \, e^{\nu_{2\,x} \varphi}, \tag{28a}$$

wobei die charakteristischen Exponenten $\nu_{1x}$ und $\nu_{2x}$ Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\nu_x^2 + (1 + \alpha_{e\,x} - \alpha_{b\,x}) \, \nu_x + \alpha_{e\,x} = 0$$

sind, und

$$\nu_{1,2,x} = -\frac{1}{2}\left[(1+\alpha_{ex}-\alpha_{bx}) \pm \sqrt{(1+\alpha_{ex}-\alpha_{bx})^2 - 4\,\alpha_{ex}}\right] \tag{28b}$$

betragen, und dem partikulären Integral der vollständigen Gleichung (27d), das man zweckmäßig nach der Methode der Variation der Konstanten ermittelt.

Insgesamt haben wir demnach als allgemeine Lösung

$$\varkappa_x = C_1\, e^{\nu_{1x}\varphi} + C_2\, e^{\nu_{2x}\varphi} + \frac{1}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\left[e^{\nu_{2x}\varphi}\int \psi^*\, e^{-\nu_{2x}\varphi}\, d\varphi - e^{\nu_{1x}\varphi}\int \psi^*\, e^{-\nu_{1x}\varphi}\, d\varphi\right]; \tag{28c}$$

und wenn wir hierin noch $\psi^*$ durch die ursprüngliche rechte Seite $\psi$ der Integralgleichung (27c) ausdrücken,

$$\varkappa_x = C_1\, e^{\nu_{1x}\varphi} + C_2\, e^{\nu_{2x}\varphi} + \psi + \frac{(1+\nu_{2x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\, e^{\nu_{2x}\varphi}\int e^{-\nu_{2x}\varphi}\,\psi\, d\varphi - \frac{(1+\nu_{1x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\, e^{\nu_{1x}\varphi}\int e^{-\nu_{1x}\varphi}\,\psi\, d\varphi\,. \tag{28d}$$

Zur Reduktion der bei der Integration entstandenen Größen $C_1$ und $C_2$ wird die Lösung (28d) in die ursprüngliche Integralgleichung (27d) eingesetzt. Man erhält schließlich nach einiger Rechnung mit Beachtung von

$$\nu_{1x}\,\nu_{2x} = \alpha_{ex}\,, \qquad \nu_{1x}+\nu_{2x} = -(1+\alpha_{ex}-\alpha_{bx})\,, \qquad 1-\alpha_{ex}+\alpha_{bx} = 2+\nu_{1x}+\nu_{2x}\,,$$

$$\alpha_{bx} = 1+\nu_{1x}\,\nu_{2x}+\nu_{1x}+\nu_{2x} = (1+\nu_{1x})\,(1+\nu_{2x})$$

die Beziehung

$$\left[C_1 - \frac{(1+\nu_{1x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\left(\int e^{-\nu_{1x}\varphi}\,\psi\, d\varphi\right)_{\varphi=0}\right]\left[\frac{1-\alpha_{ex}+\alpha_{bx}}{1+\nu_{1x}} - \frac{\alpha_{bx}}{(1+\nu_{1x})^2}\,(1+(1+\nu_{1x})\,\varphi)\right] e^{-\varphi}$$

$$+\left[C_2 + \frac{(1+\nu_{2x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\left(\int e^{-\nu_{2x}\varphi}\,\psi\, d\varphi\right)_{\varphi=0}\right]\left[\frac{1-\alpha_{ex}+\alpha_{bx}}{1+\nu_{2x}} - \frac{\alpha_{bx}}{(1+\nu_{2x})^2}\,(1+(1+\nu_{2x})\,\varphi)\right] e^{-\varphi} = 0\,,$$

woraus

$$C_1 = \frac{(1+\nu_{1x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\left(\int \psi\, e^{-\nu_{1x}\varphi}\, d\varphi\right)_{\varphi=0}, \qquad C_2 = -\frac{(1+\nu_{2x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\left(\int e^{-\nu_{2x}\varphi}\,\psi\, d\varphi\right)_{\varphi=0}$$

und damit nach (28d) für die Lösung der Integralgleichung (27c)

$$\varkappa_x = \psi + \frac{(1+\nu_{2x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\, e^{\nu_{2x}\varphi}\int_0^{\varphi} \psi\, e^{-\nu_{2x}\chi}\, d\chi - \frac{(1+\nu_{1x})^2}{\nu_{2x}-\nu_{1x}}\, e^{\nu_{1x}\varphi}\int_0^{\varphi} \psi\, e^{-\nu_{1x}\chi}\, d\chi \tag{28e}$$

gefunden wird. Drücken wir hierin $\psi$ letztlich durch die ursprünglichen Größen $m_{sx}$, $n_x$ und das Schwindglied aus, so folgt endgültig

$$\begin{aligned}\varkappa_x = -\frac{1}{E_b\,J_{ix}}&\left\{m_{sx} + \frac{1+\nu_{1x}}{\nu_{1x}-\nu_{2x}}\, e^{\nu_{1x}\varphi}\int_0^{\varphi}\left[(1+\nu_{1x})\, m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}}\,(m_{sx}+s_{bx}\,n_x)\right] e^{-\nu_{1x}\chi}\, d\chi\right.\\ &\left.-\frac{1+\nu_{2x}}{\nu_{1x}-\nu_{2x}}\, e^{\nu_{2x}\varphi}\int_0^{\varphi}\left[(1+\nu_{2x})\, m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}}\,(m_{sx}+s_{bx}\,n_x)\right] e^{-\nu_{2x}\chi}\, d\chi\right\}\\ &+\frac{F_{bx}\,s_{bx}\,\varepsilon_{s\infty}}{J_{ix}\,\varphi_\infty}\left[\frac{1+\nu_{1x}}{\nu_{1x}(\nu_{1x}-\nu_{2x})}\,(1-e^{\nu_{1x}\varphi}) - \frac{1+\nu_{2x}}{\nu_{2x}(\nu_{1x}-\nu_{2x})}\,(1-e^{\nu_{2x}\varphi})\right],\end{aligned} \tag{29}$$

so daß wir hiermit aus (26) schließlich nach längeren Umformungen

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(s_x)} = \frac{1}{E_b\,F_{ix}}&\left\{n_x + \frac{F_{bx}}{F_{ix}}\left[\frac{1+\nu_{1x}-(\bar J_{bx}/J_{ix})}{\nu_{1x}-\nu_{2x}}\, e^{\nu_{1x}\varphi}\int_0^{\varphi} n_x\, e^{-\nu_{1x}\chi}\, d\chi\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{1+\nu_{2x}-(\bar J_{bx}/J_{ix})}{\nu_{1x}-\nu_{2x}}\, e^{\nu_{2x}\varphi}\int_0^{\varphi} n_x\, e^{-\nu_{2x}\chi}\, d\chi\right]\right\}\\ &-\frac{F_{bx}\,s_{bx}}{E_b\,F_{ix}\,J_{ix}}\left[\frac{1+\nu_{1x}}{\nu_{1x}-\nu_{2x}}\, e^{\nu_{1x}\varphi}\int_0^{\varphi} m_{sx}\, e^{-\nu_{1x}\chi}\, d\chi - \frac{1+\nu_{2x}}{\nu_{1x}-\nu_{2x}}\, e^{\nu_{2x}\varphi}\int_0^{\varphi} m_{sx}\, e^{-\nu_{2x}\chi}\, d\chi\right]\\ &+\frac{F_{bx}}{F_{ix}}\,\frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}\,\frac{1}{\nu_{1x}-\nu_{2x}}\left[\frac{1}{\nu_{1x}}\left(1+\nu_{1x}-\frac{\bar J_{bx}}{J_{ix}}\right)(1-e^{\nu_{1x}\varphi}) - \frac{1}{\nu_{2x}}\left(1+\nu_{2x}-\frac{\bar J_{bx}}{J_{ix}}\right)(1-e^{\nu_{2x}\varphi})\right]\end{aligned} \tag{30}$$

erhalten. In gleicher Weise ergeben sich die übrigen Zusammenhänge zwischen den Verzerrungen und den Schnittlasten. Die Formeln für $\varkappa_y$ und $\varepsilon_y^{(sy)}$ z. B. gehen aus den Formeln (29) und (30) hervor, sofern man dort überall an Stelle der Indices $x$ den Index $y$ schreibt. Auch die Formeln für die Schubverzerrungen sind analog aufgebaut. Beispielsweise gehen die Formeln für $\varkappa_{xy}$ und $\gamma_{xy}^{(sx)}$ aus (29) und (30) hervor, wenn man dort $\varkappa_x$ durch $\varkappa_{xy}$, $\varepsilon_x^{(sx)}$ durch $\frac{1}{2}\gamma_{xy}^{(sx)}$, $n_x$ durch $n_{xy}$ sowie $m_{sx}$ durch $m_{sxy}$ ersetzt und den Schwindanteil Null setzt.

c) Zusammenhang zwischen den Teilschnittlasten und den Plattenverzerrungen. Durch Integration der Spannungen bzw. der Spannungsmomente über die Teilquerschnitte erhalten wir die Teilschnittlasten. Es ergibt sich

$$n_{bx} = \int\limits_{(F_{bx})} \sigma_x \, df_x = E_b \int\limits_{(F_{bx})} \left\{ \varepsilon_x - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \varepsilon_x \, e^{\chi} \, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) \right\} df_x$$

$$= E_b F_{bx} \left[ \varepsilon_x^{(sx)} + s_{bx} \varkappa_x - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} (\varepsilon_x^{(sx)} + s_{bx} \varkappa_x) \, e^{\chi} \, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) \right], \tag{31a}$$

und enstprechend

$$n_{bxy} = E_b F_{bx} \left[ \frac{\gamma_{xy}^{(sx)}}{2} + s_{bx} \varkappa_{xy} - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \left( \frac{\gamma_{xy}^{(sx)}}{2} + s_{bx} \varkappa_{xy} \right) e^{\chi} \, d\chi \right], \tag{31b}$$

$$n_{byx} = E_b F_{by} \left[ \frac{\gamma_{xy}^{(sy)}}{2} + s_{by} \varkappa_{xy} - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \left( \frac{\gamma_{xy}^{(sy)}}{2} + s_{by} \varkappa_{xy} \right) e^{\chi} \, d\chi \right], \tag{31c}$$

$$n_{by} = E_b F_{by} \left[ \varepsilon_y^{(sy)} + s_{by} \varkappa_y - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} (\varepsilon_y^{(sy)} + s_{by} \varkappa_y) \, e^{\chi} \, d\chi + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) \right], \tag{31d}$$

$$m_{bx} = \int\limits_{(F_{bx})} \sigma_x \eta_{bx} \, df_x = - E_b \bar{J}_{bx} \left( \varkappa_x - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi} \varkappa_x \, d\chi \right), \tag{32a}$$

und entsprechend

$$m_{bxy} = - E_b \bar{J}_{bx} \left( \varkappa_{xy} - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \varkappa_{xy} \, e^{\chi} \, d\chi \right), \tag{32b}$$

$$m_{byx} = - E_b \bar{J}_{by} \left( \varkappa_{xy} - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \varkappa_{xy} \, e^{\chi} \, d\chi \right), \tag{32c}$$

$$m_{by} = - E_b \bar{J}_{by} \left( \varkappa_y - e^{-\varphi} \int\limits_{\chi=0}^{\varphi} \varkappa_y \, e^{\chi} \, d\chi \right), \tag{32d}$$

sowie

$$n_{ex} = \int\limits_{(F_{ex})} \sigma_x \, df_x = E_e \int\limits_{(F_{ex})} (\varepsilon_x^{(sx)} - z_x \varkappa_x) \, df_x = E_e F_{ex} (\varepsilon_x^{(sx)} - s_{ex} \varkappa_x) \tag{33a}$$

und entsprechend

$$n_{exy} = E_e F_{ex} \left( \frac{\gamma_{xy}^{(sx)}}{2} - s_{ex} \varkappa_{xy} \right), \tag{33b}$$

$$n_{eyx} = E_e F_{ey} \left( \frac{\gamma_{xy}^{(sy)}}{2} - s_{ey} \varkappa_{xy} \right), \tag{33c}$$

$$n_{ey} = E_e F_{ey} (\varepsilon_y^{(sy)} - s_{ey} \varkappa_y), \tag{33d}$$

sowie

$$m_{ex} = \int\limits_{(F_{ex})} \sigma_x \eta_{ex} \, df_x = - E_e \bar{J}_{ex} \varkappa_x, \tag{34a}$$

und entsprechend

$$m_{exy} = - E_e \bar{J}_{ex} \varkappa_{xy}, \qquad m_{eyx} = - E_e \bar{J}_{ey} \varkappa_{xy}, \qquad m_{ey} = - E_e \bar{J}_{ey} \varkappa_y. \tag{34b—d}$$

Mit (24), (25), (31), (32), (33) und (34) erhalten wir noch folgende Indentitäten:

$$n_{bx} = \frac{F_{bx}}{F_{ix}} n_x - \frac{m_{sx} - m_{bx} - m_{ex}}{s_{bx} + s_{ex}}, \qquad n_{ex} = \frac{n F_{ex}}{F_{ix}} n_x + \frac{m_{sx} - m_{bx} - m_{ex}}{s_{bx} + s_{ex}},$$

$$n_{bxy} = \frac{F_{bx}}{F_{ix}} n_{xy} - \frac{m_{sxy} - m_{bxy} - m_{exy}}{s_{bx} + s_{ex}}, \qquad n_{exy} = \frac{n F_{ex}}{F_{ix}} n_{xy} + \frac{m_{sxy} - m_{bxy} - m_{exy}}{s_{bx} + s_{ex}},$$

$$n_{byx} = \frac{F_{by}}{F_{iy}} n_{yx} - \frac{m_{syx} - m_{byx} - m_{eyx}}{s_{by} + s_{ey}}, \qquad n_{eyx} = \frac{n F_{ey}}{F_{iy}} n_{yx} + \frac{m_{syx} - m_{byx} - m_{eyx}}{s_{by} + s_{ey}},$$

$$n_{by} = \frac{F_{by}}{F_{iy}} n_y - \frac{m_{sy} - m_{by} - m_{ey}}{s_{by} + s_{ey}}, \qquad n_{ey} = \frac{n F_{ey}}{F_{iy}} n_y + \frac{m_{sy} - m_{by} - m_{ey}}{s_{by} + s_{ey}}.$$

d) Zusammenhang zwischen den Teilschnittlasten und den Gesamtschnittlasten. Mit den durch die Gesamtschnittlasten nach (29) und (30) (sowie den hier aus Platzgründen nicht niedergeschriebenen analogen Gleichungen) ausgedrückten Membran- und Biegeverzerrungen $\varepsilon$ und $\varkappa$ der Platte, können wir nun, indem wir die Plattenverzerrungen in (31) bis (34) einsetzen, den Zusammenhang zwischen den Teilschnittlasten und den Gesamtschnittlasten angeben. Wir betrachten auch hier aus Platzgründen allein die Normalkräfte und Biegemomente in der $x$-Richtung, da für die übrigen Größen wieder völlig analoge Formeln gelten. Einsetzen von (29) und (30) in (31a), (32a), (33a) und (34a) liefert schließlich nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} m_{bx} = {} & \underline{\frac{\bar J_{bx}}{J_{ix}} m_{sx}} + \frac{\bar J_{bx}}{J_{ix}} \left\{ \frac{\nu_{1x}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} e^{\nu_{1x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{1x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{1x}\chi} \, d\chi \right. \\ & \left. - \frac{\nu_{2x}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} e^{\nu_{2x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{2x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{2x}\chi} \, d\chi \right\} \\ & - E_b F_{ix} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \frac{s_{bx}\alpha_{bx}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} (e^{\nu_{2x}\varphi} - e^{\nu_{1x}\varphi}), \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} m_{ex} = {} & \underline{\frac{n \bar J_{ex}}{J_{ix}} m_{sx}} + \frac{n \bar J_{ex}}{J_{ix}} \left\{ \frac{1+\nu_{1x}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} e^{\nu_{1x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{1x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{1x}\chi} \, d\chi \right. \\ & \left. - \frac{1+\nu_{2x}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} e^{\nu_{2x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{2x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{2x}\chi} \, d\chi \right\} \\ & - E_b F_{ix} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \frac{s_{ex}\alpha_{ex}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} \left[ \frac{1+\nu_{1x}}{\nu_{1x}} (1 - e^{\nu_{1x}\varphi}) - \frac{1+\nu_{2x}}{\nu_{2x}} (1 - e^{\nu_{2x}\varphi}) \right], \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} n_{bx} = {} & \underline{\frac{F_{bx}}{F_{ix}} n_x - \frac{s_{bx} F_{bx}}{J_{ix}} m_{sx}} \\ & + \frac{(1+\nu_{1x}) n \bar J_{ex} + \nu_{1x} \bar J_{bx}}{J_{ix}(s_{ex} + s_{bx})(\nu_{1x} - \nu_{2x})} e^{\nu_{1x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{1x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{1x}\chi} \, d\chi \\ & - \frac{(1+\nu_{2x}) n \bar J_{ex} + \nu_{2x} \bar J_{bx}}{J_{ix}(s_{ex} + s_{bx})(\nu_{1x} - \nu_{2x})} e^{\nu_{2x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{2x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{2x}\chi} \, d\chi \\ & + E_b F_{bx} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \left[ 1 + \frac{n F_{ex}/F_{ix}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} \left( \frac{(1+\nu_{1x}) n \bar J_{ex} + \nu_{1x} \bar J_{bx}}{J_{ix} \nu_{1x}} e^{\nu_{1x}\varphi} - \frac{(1+\nu_{2x}) n \bar J_{ex} + \nu_{2x} \bar J_{bx}}{J_{ix} \nu_{2x}} e^{\nu_{2x}\varphi} \right) \right], \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} n_{ex} = {} & \underline{\frac{n F_{ex}}{F_{ix}} n_x + \frac{n F_{ex} s_{ex}}{J_{ix}} m_{sx}} \\ & - \frac{(1+\nu_{1x}) n \bar J_{ex} + \nu_{1x} \bar J_{bx}}{J_{ix}(s_{ex} + s_{bx})(\nu_{1x} - \nu_{2x})} e^{\nu_{1x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{1x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{1x}\chi} \, d\chi \\ & + \frac{(1+\nu_{2x}) n \bar J_{ex} + \nu_{2x} \bar J_{bx}}{J_{ix}(s_{ex} + s_{bx})(\nu_{1x} - \nu_{2x})} e^{\nu_{2x}\varphi} \int_0^\varphi \left[ (1+\nu_{2x}) m_{sx} - \frac{F_{bx}}{F_{ix}} (m_{sx} + s_{bx} n_x) \right] e^{-\nu_{2x}\chi} \, d\chi \\ & - E_b F_{bx} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \left[ 1 + \frac{n F_{ex}/F_{ix}}{\nu_{1x} - \nu_{2x}} \left( \frac{(1+\nu_{1x}) n \bar J_{ex} + \nu_{1x} \bar J_{bx}}{J_{ix} \nu_{1x}} e^{\nu_{1x}\varphi} - \frac{(1+\nu_{2x}) n \bar J_{ex} + \nu_{2x} \bar J_{bx}}{J_{ix} \nu_{2x}} e^{\nu_{2x}\varphi} \right) \right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Dabei stellen die unterstrichenen jeweils ersten Ausdrücke (vgl. Abschn. 3, Formel (14)) die Verteilungsgrößen dar, während der Rest dementsprechend der allgemeine Ausdruck für die jeweilige Umlagerungsgröße ist.

e) Die Verschiebungsgleichungen des Problems. Mit (24), (25) bzw. mit (31) bis (34) sind sämtliche Plattenschnittlasten durch die Plattenverzerrungen ausgedrückt worden. Daher benötigen wir zur endgültigen Lösung der Aufgabe Beziehungen für die Plattenverzerrungen bzw. für die Verschiebungen der Mittelfläche. Analog Abschn. **3** gewinnen wir sie aus den Gleichgewichtsbedingungen (15a—e) am Plattenelement[1]. Beachten wir, daß

$$m_{0x} = m_{sx} + s_x n_x\,, \qquad m_{0xy} = m_{sxy} + s_x n_{xy}\,,$$
$$m_{0y} = m_{sy} + s_y n_y\,, \qquad m_{0yx} = m_{syx} + s_y n_{yx}$$

ist, so erhalten wir zunächst aus (16c)

$$\frac{\partial^2 m_{sx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(m_{sxy} + m_{syx}) + \frac{\partial^2 m_{sy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(s_x n_x) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(s_x n_{xy} + s_y n_{yx}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(s_y n_y) + p_z = 0\,. \tag{39a}$$

Hierin werden die Beziehungen (24) und (25) eingesetzt, wobei wir die Membranverzerrungen der ideellen Schwerebenen nach Maßgabe von (9) in die Mittelflächen-Membranverzerrungen umrechnen. Man erhält dann nach einiger Rechnung die Integro-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}(J_{i0x}\varkappa_x) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[(J_{i0x} + J_{i0y})\varkappa_{xy}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(J_{i0y}\varkappa_y) \\
&\quad - e^{-\varphi}\int_0^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(J_{b0x}\varkappa_x) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[(J_{b0x} + J_{b0y})\varkappa_{xy}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(J_{b0y}\varkappa_y)\right\}d\chi \\
&= \frac{p_z}{E_b} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_{ix}s_x\varepsilon_{0x}) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{F_{ix}s_x + F_{iy}s_y}{2}\gamma_{0xy}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F_{iy}s_y\varepsilon_{0y}) \\
&\quad + e^{-\varphi}\int_0^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{bx}F_{bx}\varepsilon_{0x}) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{a_{bx}F_{bx} + a_{by}F_{by}}{2}\gamma_{0xy}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{by}F_{by}\varepsilon_{0y})\right\}d\chi \\
&\quad - \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{bx}F_{bx}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{by}F_{by})\right].
\end{aligned} \tag{40}$$

Dabei bedeuten $J_{b0x}$ bzw. $J_{b0y}$ die Trägheitsmomente der Betonquerschnittflächen $F_{bx}$ bzw. $F_{by}$ hinsichtlich der, durch die Plattenmittelfläche verlaufenden Achsen und $a_{bx}$ bzw. $a_{by}$ die Schwerpunktsabstände der Betonflächen von der Mittelfläche. Für die Membranverzerrungen der Mittelfläche erhalten wir aus den beiden ersten Kraftgleichgewichtsbedingungen (15a, b) die maßgebenden Beziehungen. Einsetzen von (24) in (15a, b) liefert, nachdem man wieder die Membranverzerrungen der ideellen Schwerebenen nach Maßgabe von (9) in die Mittelflächenverzerrungen umgerechnet hat, nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(F_{ix}\varepsilon_{0x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{iy}\frac{\gamma_{0xy}}{2}\right) - e^{-\varphi}\int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F_{bx}\varepsilon_{0x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{by}\frac{\gamma_{0xy}}{2}\right)\right\}d\chi \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}(s_x F_{ix}\varkappa_x) - \frac{\partial}{\partial y}(F_{iy}s_y\varkappa_{xy}) - e^{-\varphi}\int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(a_{bx}F_{bx}\varkappa_x) + \frac{\partial}{\partial y}(a_{by}F_{by}\varkappa_{xy})\right\}d\chi \\
&\quad + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{p_x}{E_b} = 0\,,
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{ix}\frac{\gamma_{0xy}}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{iy}\varepsilon_{0y}) - e^{-\varphi}\int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{bx}\frac{\gamma_{0xy}}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{by}\varepsilon_{0y})\right\}d\chi \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}(s_x F_{ix}\varkappa_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(s_y F_{iy}\varkappa_y) - e^{-\varphi}\int_{\chi=0}^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(a_{bx}F_{bx}\varkappa_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(a_{by}F_{by}x_y)\right\}d\chi \\
&\quad + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1 - e^{-\varphi})\frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{p_y}{E_b} = 0\,.
\end{aligned} \tag{42}$$

[1] Die zeitliche Veränderlichkeit der Lasten sei hinreichend klein, um das Problem als ein statisches ansehen zu können.

Zur Lösung dieser Gleichungen wird man stets auf die zugehörigen Differentialgleichungen zurückgehen, die man dadurch gewinnt, daß man mit $e^{\varphi}$ multipliziert und hernach nach $\varphi$ differentiiert.

Für den Spezialfall einer zur Plattenmittelfläche symmetrischen Bewehrung ($a_{bx} = a_{by} = s_x = s_y = 0$) zerfällt das Gleichungssystem, wie auch in der gewöhnlichen Plattentheorie, in eine Gleichung für die Mittelflächendurchsenkungen $w$ und in zwei gekoppelte Verschiebungsgleichungen für die Scheibenverschiebungen $u_0$ und $v_0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(J_{i0x}\varkappa_x) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[(J_{i0x}+J_{i0y})\varkappa_{xy}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(J_{i0y}\varkappa_y)$$
$$- e^{-\varphi}\int_0^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(J_{b0x}\varkappa_x) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[(J_{b0x}+J_{b0y})\varkappa_{xy}] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(J_{b0y}\varkappa_y)\right\}d\chi = \frac{p_z}{E_b}, \quad (43\text{a})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_{ix}\varepsilon_{0x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_{iy}}{2}\gamma_{0xy}\right) - e^{-\varphi}\int_0^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F_{bx}\varepsilon_{0x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_{by}}{2}\gamma_{0xy}\right)\right\}d\chi$$
$$+ \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1-e^{-\varphi})\frac{\partial F_{bx}}{\partial x} + \frac{p_x}{E_b} = 0\,, \quad (43\text{b})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_{ix}}{2}\gamma_{0xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{iy}\varepsilon_{0y}) - e^{-\varphi}\int_0^{\varphi} e^{\chi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_{bx}}{2}\gamma_{0xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{by}\varepsilon_{0y})\right\}d\chi$$
$$+ \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty}(1-e^{-\varphi})\frac{\partial F_{by}}{\partial y} + \frac{p_y}{E_b} = 0\,, \quad (43\text{c})$$

und speziell bei konstanter Bewehrung in

$$J_{i0x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (J_{i0x}+J_{i0y})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + J_{i0y}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$
$$- e^{-\varphi}\int_0^{\varphi} e^{\chi}\left\{J_{b0x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (J_{b0x}+J_{b0y})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + J_{b0y}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}d\chi = \frac{p_z}{E_b}, \quad (44\text{a})$$

sowie in

$$F_{ix}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{F_{iy}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - e^{-\varphi}\int_0^{\varphi}\left\{F_{bx}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{F_{by}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right\}e^{\chi}\,d\chi + \frac{p_x}{E_b} = 0\,, \quad (44\text{b})$$

$$\frac{F_{ix}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + F_{iy}\frac{\partial^2 v_0}{dy^2} - e^{-\varphi}\int_0^{\varphi}\left\{\frac{F_{bx}}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + F_{by}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\right\}e^{\chi}\,d\chi + \frac{p_y}{E_b} = 0\,. \quad (44\text{c})$$

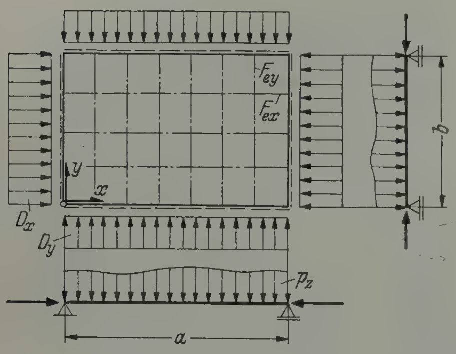

Abb. 6.

**5. Beispiele: Die konstant und zur Mittelfläche symmetrisch bewehrte, allseitig gelenkig gelagerte Platte unter Quer- und Axialbelastung.** a) Allgemeine Lösung bei konstanter Randbelastung. Von der, unter einer lotrechten Belastung

$$p_z(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q_{jk}\sin j\pi\frac{x}{a}\sin k\pi\frac{y}{b} \quad (45)$$

und den konstanten Randdruckkräften $D_x$ und $D_y$ stehenden Rechteckplatte der Abb. 6 wollen wir voraussetzen, daß sie nur im Koordinatenursprung unverschieblich gelagert sei, so daß die durch das Kriechen und Schwinden bedingten Verformungen der Platte in ihrer Ebene längs der Schneidenlagerungen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ nicht behindert werden und somit auch keine in der Plattenebene wirkenden zusätzlichen Auflagerlasten längs der Schneidenlager mobilisiert werden. Mit

$$u_0(x, y) = u_0(x) = A(\varphi)\cdot x\,, \qquad v_0(x, y) = v_0(y) = B(\varphi)\cdot y \quad (46\text{a})$$

ist dann ein die geometrischen Randbedingungen sowie die Verschiebungsgleichungen[1] (44b, c) befriedigender Membranverschiebungszustand gefunden, so daß wir aus (24) mit[2]

$$\varepsilon_x^{(s_x)} = \varepsilon_{0x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} = A(\varphi), \qquad \varepsilon_y^{(s_y)} = \varepsilon_{0y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = B(\varphi),$$

$$\gamma_{xy}^{(s_x)} = \gamma_{xy}^{(s_y)} = \gamma_{0xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0$$

schließlich

$$\left.\begin{aligned} n_x &= E_b \left[F_{ix} A(\varphi) - F_{bx} e^{-\varphi} \int_0^\varphi e^\chi A(\chi)\, d\chi + \frac{F_{bx}\,\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi})\right], \\ n_y &= E_b \left[F_{iy} B(\varphi) - F_{by} e^{-\varphi} \int_0^\varphi e^\chi B(\chi)\, d\chi + \frac{F_{by}\,\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi})\right], \\ n_{xy} &= n_{yx} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{46b}$$

erhalten.

Die dynamischen Randbedingungen längs der Schneidenlager

$$n_x(0, y) = n_x(a, y) = -D_x, \qquad n_y(x, 0) = n_y(x, b) = -D_y$$

können mit (46b) nur erfüllt werden, sofern

$$n_x \equiv -D_x, \qquad n_y \equiv -D_y \tag{46c}$$

ist, womit für die zunächst unbestimmt gebliebenen Funktionen $A(\varphi)$ und $B(\varphi)$ aus (46b) zwei Integralgleichungen hervorgehen.

Wir betrachten allein die erste Gleichung weiter und erhalten aus $n_x = -D_x$ die Integralgleichung

$$F_{ix} A(\varphi) - F_{bx} e^{-\varphi} \int_0^\varphi e^\chi A(\chi)\, d\chi = -\frac{F_{bx}\,\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} (1 - e^{-\varphi}) - \frac{D_x}{E_b}, \tag{47a}$$

und nach Anwendung der Operation $e^{-\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [e^\varphi(\;)]$ unter Beachtung von $F_{ix} - F_{bx} = n\, F_{ex}$

$$\frac{dA}{d\varphi} + \frac{n\, F_{ex}}{F_{ix}} A(\varphi) = -\frac{F_{bx}}{F_{ix}} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} - \frac{D_x}{E_b\, F_{ix}} \tag{47b}$$

mit der Lösung

$$A(\varphi) = C\, e^{-\frac{n F_{ex}}{F_{ix}} \varphi} - \frac{F_{bx}}{n\, F_{ex}} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} - \frac{D_x}{E_b\, n\, F_{ex}}. \tag{47c}$$

Einsetzen der Lösung in die ursprüngliche Integralgleichung (47a) liefert schließlich nach Koeffizientenvergleich hinsichtlich $e^\varphi$

$$C = \frac{F_{bx}}{n\, F_{ex}} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} + \frac{D_x\, F_{bx}}{E_b\, n\, F_{ex}\, F_{ix}},$$

so daß endgültig

$$A(\varphi) = -\frac{F_{bx}}{n\, F_{ex}} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \left(1 - e^{-\frac{n F_{ex}}{F_{ix}} \varphi}\right) - \frac{D_x}{E_b\, F_{ix}} \left[1 + \frac{F_{bx}}{n\, F_{ex}} \left(1 - e^{-\frac{n F_{ex}}{F_{ix}} \varphi}\right)\right], \tag{48a}$$

und entsprechend[3]

$$B(\varphi) = -\frac{F_{by}}{n\, F_{ey}} \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \left(1 - e^{-\frac{n F_{ey}}{F_{iy}} \varphi}\right) - \frac{D_y}{E_b\, F_{iy}} \left[1 + \frac{F_{by}}{n\, F_{ey}} \left(1 - e^{-\frac{n F_{ey}}{F_{iy}} \varphi}\right)\right] \tag{48b}$$

hervorgeht.

Um den Einfluß der Membrankräfte auf die Biegung der Platte berücksichtigen zu können, fügen wir, ebenso wie bei der Untersuchung von Plattenbeulungsproblemen zu der gegebenen Belastung $p_z$ noch die lotrechten Komponenten der (nunmehr am verformten System angreifenden)

---

[1] Hierin sind $p_x = p_y = 0$ zu setzen.

[2] Bei symmetrischer Bewehrung sind $s_{bx} = s_{by} = s_x = s_y = a_{bx} = a_{by} = 0$, und die ideellen Gesamtquerschnitts-Schwerpunkte liegen in der Mittelfläche.

[3] Dieses sind dieselben Funktionen, die auch beim Balken das durch Bewehrung behinderte Schwinden und die Verkürzung durch eine konstante Druckkraft beschreiben, vgl. z. B. Fußnote 2 von Seite 1.

Membrankräfte hinzu. Dies führt, wie bekannt, im allgemeinen Falle dazu, daß man in der Plattengleichung anstelle der Querbelastung $p_z$ mit der ideellen Querbelastung

$$\overline{p}_z = p_z + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (n_{xy} + n_{yx}) \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

rechnen muß. In unserem Falle ist also

$$\overline{p}_z = p_z - D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

in (44a) einzuführen, so daß wir endgültig für die Biegefläche die Integro-Differentialgleichung[1]

$$J_{ix} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (J_{ix} + J_{iy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + J_{iy} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{D_x}{E_b} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D_y}{E_b} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$- e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} e^{\chi} \left\{ \overline{J}_{bx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\overline{J}_{bx} + \overline{J}_{by}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + \overline{J}_{by} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} d\chi = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{jk}}{E_b} \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b} \qquad (49\,\text{a})$$

zu lösen haben.

Die Randbedingungen des Problems umfassen die geometrischen Aussagen

$$w(0, y) = 0\,, \qquad w(a, y) = 0\,, \qquad w(x, 0) = 0\,, \qquad w(x, b) = 0 \qquad (49\,\text{b})$$

sowie die dynamischen Bedingungen

$$m_{sx}(0, y) = 0\,, \qquad m_{sx}(a, y) = 0\,, \qquad m_{sy}(x, 0) = 0\,, \qquad m_{sy}(x, b) = 0\,. \qquad (49\,\text{c})$$

Mit Rücksicht auf (25), woraus mit $s_{bx} = s_{by} = 0$ eine alleinige Abhängigkeit der Momente von den zugehörigen Krümmungen folgt, lassen sich die Bedingungen (49c) auf

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_x(0, y) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{0,y} = 0\,, & \varkappa_x(a, y) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{a,y} = 0\,, \\ \varkappa_y(x, 0) &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg|_{x,0} = 0\,, & \varkappa_y(x, b) &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg|_{x,b} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (49\,\text{d})$$

zurückführen.

Zur Lösung von (49a) benutzen wir den, die Randbedingungen (49b) und (49d) befriedigenden Ansatz

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{jk}(\varphi) \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}\,. \qquad (50)$$

Einsetzen in (49a) liefert nach Koeffizientenvergleich hinsichtlich $\sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}$ das System der Integralgleichungen

$$\Phi_{jk} - \frac{\lambda_{jk}^{(b)}}{\lambda_{jk}^{(i)}} e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} \Phi_{jk}(\chi)\, e^{\chi}\, d\chi = \frac{q_{jk}}{\lambda_{jk}^{(i)}}\,, \qquad (51\,\text{a})$$

wobei zur Abkürzung

$$\lambda_{jk}^{(i)} = \frac{j^2\pi^2}{a^2}\left(\frac{j^2\pi^2 E_b J_{ix}}{a^2} - D_x\right) + \frac{E_b j^2 k^2 \pi^4}{a^2 b^2}(J_{ix} + J_{iy}) + \frac{k^2\pi^2}{b^2}\left(\frac{k^2\pi^2 E_b J_{iy}}{b^2} - D_y\right), \qquad (51\,\text{b})$$

$$\lambda_{jk}^{(b)} = E_b \pi^4 \left[\frac{j^4}{a^4} \overline{J}_{bx} + \frac{j^2 k^2}{a^2 b^2} (\overline{J}_{bx} + \overline{J}_{by}) + \frac{k^4}{b^4} \overline{J}_{by}\right] \qquad (51\,\text{c})$$

gesetzt ist. Mit der weiteren Abkürzung

$$\lambda_{jk}^{(e)} = \lambda_{jk}^{(i)} - \lambda_{jk}^{(b)} = \frac{j^2\pi^2}{a^2}\left(\frac{j^2\pi^2 n E_b \overline{J}_{ex}}{a^2} - D_x\right) + \frac{j^2 k^2 \pi^4}{a^2 b^2} n E_b (\overline{J}_{ex} + \overline{J}_{ey}) + \frac{k^2\pi^2}{b^2}\left(\frac{k^2\pi^2 n E_b \overline{J}_{ey}}{b^2} - D_y\right), \qquad (51\,\text{d})$$

wobei $n\,\overline{J}_{ex} = J_{ix} - \overline{J}_{bx}$ bzw. $n\,\overline{J}_{ey} = J_{iy} - \overline{J}_{by}$ die $n$-fachen Trägheitsmomente der (symmetrischen) Bewehrung hinsichtlich der durch die Mittelflächen verlaufenden Achsen bedeuten, erhalten wir aus (51a), nachdem wir die Operation $e^{-\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} [e^{\varphi}(\,)]$ angewendet haben, die Differentialgleichung

$$\frac{d\Phi_{jk}}{d\varphi} + \frac{\lambda_{jk}^{(e)}}{\lambda_{jk}^{(i)}} \Phi_{jk} = \frac{q_{jk}}{\lambda_{jk}^{(i)}}\,,$$

---

[1] Da wegen der Symmetrie der Bewehrung sämtliche Schwerpunkte in der Mittelfläche liegen, ist $J_{i0x} = J_{ix}$, $J_{i0y} = J_{iy}$, $J_{b0x} = \overline{J}_{bx}$, $J_{b0y} = \overline{J}_{by}$.

deren Lösung

$$\Phi_{jk} = C_{jk}\, e^{-\frac{\lambda^{(e)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}\varphi} + \frac{q_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}}$$

lautet. Nach Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung (51a) wird nun die Konstante $C_{jk}$ zu

$$C_{jk} = -\frac{q_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}} \frac{\lambda^{(b)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}$$

bestimmt, so daß wir endgültig als Lösung

$$\Phi_{jk} = \frac{q_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}} \left[1 + \frac{\lambda^{(b)}_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda^{(e)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}\varphi}\right)\right] \tag{51e}$$

haben.

Nach (50) ist somit die Lösung für die Biegefläche gefunden

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}} \left[1 + \frac{\lambda^{(b)}_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda^{(e)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}\varphi}\right)\right] \sin j\pi \frac{x}{a} \sin k\pi \frac{y}{b}, \tag{52}$$

und wir erhalten die Plattenschnittlasten im Sinne von (25) (mit $s_{bx} = s_{by} = 0$)

$$\left.\begin{aligned}
m_{sx} &= -E_b \left\{J_{ix}\varkappa_x - \bar{J}_{bx}\, e^{-\varphi} \int_0^{\varphi} e^{\chi} \varkappa_x \, d\chi\right\} \\
&= \frac{\pi^2 E_b}{a^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j^2 q_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}} \left\{\underline{J_{ix}} + \frac{J_{ix}\lambda^{(b)}_{jk} - \bar{J}_{bx}\lambda^{(i)}_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda^{(e)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}\varphi}\right)\right\} \sin j\pi\frac{x}{a} \sin k\pi\frac{y}{b},
\end{aligned}\right.$$

und entsprechend

$$\left.\begin{aligned}
m_{sxy} &= -\frac{\pi^2 E_b}{ab} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j\,k\, q_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}} \left\{\underline{J_{ix}} + \frac{J_{ix}\lambda^{(b)}_{jk} - \bar{J}_{bx}\lambda^{(i)}_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda^{(e)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}\varphi}\right)\right\} \cos j\pi\frac{x}{a} \cos k\pi\frac{y}{b}, \\
m_{syx} &= -\frac{\pi^2 E_b}{ab} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j\,k\, q_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}} \left\{\underline{J_{iy}} + \frac{J_{iy}\lambda^{(b)}_{jk} - \bar{J}_{by}\lambda^{(i)}_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda^{(e)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}\varphi}\right)\right\} \cos j\pi\frac{x}{a} \cos k\pi\frac{y}{b}, \\
m_{sy} &= \frac{\pi^2 E_b}{b^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 q_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}} \left\{\underline{J_{iy}} + \frac{J_{iy}\lambda^{(b)}_{jk} - \bar{J}_{by}\lambda^{(i)}_{jk}}{\lambda^{(e)}_{jk}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda^{(e)}_{jk}}{\lambda^{(i)}_{jk}}\varphi}\right)\right\} \sin j\pi\frac{x}{a} \sin k\pi\frac{y}{b}.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Dabei stellt das unterstrichene Glied jeweils den Anteil dar, der unter Zugrundelegung rein elastischer Verformungen entstehen würde. Der jeweils zweite, von $\varphi$ abhängige Ausdruck gibt den Anteil, der durch die zeitabhängigen Verformungen des Betons bedingt ist.

Wir betrachten noch zwei Spezialfälle, bei denen wir zwei grundsätzliche Erkenntnisse gewinnen.

b) Die Platte ohne Axialbelastung. In diesem Falle ergibt sich aus (51b, c, d)

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\lambda}^{(i)}_{jk} &= \left(\frac{j^2\pi^2}{a^2} + \frac{k^2\pi^2}{b^2}\right)\left(\frac{j^2\pi^2 E_b J_{ix}}{a^2} + \frac{k^2\pi^2 E_b J_{iy}}{b^2}\right), \\
\bar{\lambda}^{(b)}_{jk} &= \left(\frac{j^2\pi^2}{a^2} + \frac{k^2\pi^2}{b^2}\right)\left(\frac{j^2\pi^2 E_b \bar{J}_{bx}}{a^2} + \frac{k^2\pi^2 E_b \bar{J}_{by}}{b^2}\right), \\
\bar{\lambda}^{(e)}_{jk} &= \left(\frac{j^2\pi^2}{a^2} + \frac{k^2\pi^2}{b^2}\right)\left(\frac{j^2\pi^2 n E_b \bar{J}_{ex}}{a^2} + \frac{k^2\pi^2 n E_b \bar{J}_{ey}}{b^2}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{54a}$$

also

$$\frac{\bar{\lambda}^{(e)}_{jk}}{\bar{\lambda}^{(i)}_{jk}} = \omega_{jk} = n\,\frac{j^2 b^2 \bar{J}_{ex} + k^2 a^2 \bar{J}_{ey}}{j^2 b^2 J_{ix} + k^2 a^2 J_{iy}} \tag{54b}$$

und insbesondere

$$\frac{J_{ix}\bar{\lambda}^{(b)}_{jk} - \bar{J}_{bx}\bar{\lambda}^{(i)}_{jk}}{\bar{\lambda}^{(e)}_{jk}} = \frac{\frac{d^2}{12}\left(\bar{J}_{ex} - \bar{J}_{ey}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{j}{k}\right)^2 \bar{J}_{ex} + \bar{J}_{ey}}, \quad \frac{J_{iy}\bar{\lambda}^{(b)}_{jk} - \bar{J}_{by}\bar{\lambda}^{(i)}_{jk}}{\bar{\lambda}^{(e)}_{jk}} = \frac{\frac{d^3}{12}\left(\bar{J}_{ey} - \bar{J}_{ex}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{k}{j}\right)^2 \bar{J}_{ey} + \bar{J}_{ex}}, \tag{54c}$$

woraus wir erkennen, daß für $\bar{J}_{ex} = \bar{J}_{ey}$ (Platte isotroper Biegesteifigkeit) sich die Plattenschnittlasten zeitlich nicht ändern, also die aus der üblichen Theorie elastischer Platten sich ergebenden Werte beibehalten werden. Sind jedoch die Eisen-Trägheitsmomente in den beiden Richtungen verschieden, so tritt eine Umlagerung der Schnittlasten im Laufe der Zeit ein, und zwar in dem Sinne, daß die Richtung mit der größeren Eisensteifigkeit mit der Zeit größere Momentenbeanspruchungen erhält, während die Querschnitte mit der kleineren Eisensteifigkeit gleichzeitig eine Entlastung erfahren.

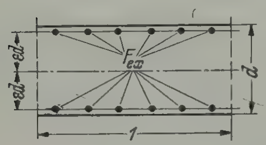

Abb. 7.

Um die Größe dieser Lastumlagerungen, die aus der ungleichen Bewehrung herrühren, abschätzen zu können, betrachten wir eine quadratische Platte mit $a = b = l$, die (was den extremalen Fall darstellt) in $y$-Richtung unbewehrt ist. Für eine Belastung

$$p_z = q \sin \pi \frac{x}{l} \sin \pi \frac{y}{l}$$

erhalten wir dann mit

$$\varrho = 6\,\varepsilon^2 (n-1)\,\mu_x ,$$

wobei $\mu_x = F_{ex}/d$ der Bewehrungsprozentsatz und $\varepsilon\, d$ der Abstand der (symmetrischen) Eiseneinlagen von der Mittelfläche sind (Abb. 7), schließlich mit $J = d^3/12$

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{q\,l^4 \sin \pi \frac{x}{l} \sin \pi \frac{y}{l}}{4\pi^4 E_b J (1+\varrho)}\left[1 + \frac{n-1-\varrho}{n\varrho}\left(1 - e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}}\right)\right],\\
m_{sx} &= \frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{1+2\varrho}{1+\varrho}\left[1 + \frac{1}{1+2\varrho}\left(1 - e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}}\right)\right] \sin \pi \frac{x}{l} \sin \pi \frac{y}{l},\\
m_{sxy} &= -\frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{1+2\varrho}{1+\varrho}\left[1 + \frac{1}{1+2\varrho}\left(1 - e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}}\right)\right] \cos \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{y}{l},\\
m_{syx} &= m_{byx} = -\frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{1+\varrho}\, e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}} \cos \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{y}{l},\\
m_{sy} &= m_{by} = \frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{1}{1+\varrho}\, e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}} \sin \pi \frac{x}{l} \sin \pi \frac{y}{l},\\
&\text{und weiterhin aus (32) und (34)}\\
m_{bx} &= \frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{n-1-2\varrho}{(n-1)(1+\varrho)}\, e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}} \sin \pi \frac{x}{l} \sin \pi \frac{y}{l},\\
m_{ex} &= \frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{2n\varrho}{(n-1)(1+\varrho)}\left[1 + \frac{n-1-\varrho}{n\varrho}\left(1 - e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}}\right)\right] \sin \pi \frac{x}{l} \sin \pi \frac{y}{l},\\
m_{bxy} &= -\frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{n-1-2\varrho}{(n-1)(1+\varrho)}\, e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}} \cos \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{y}{l},\\
m_{exy} &= -\frac{q\,l^2}{4\pi^2}\,\frac{2n\varrho}{(n-1)(1+\varrho)}\left[1 + \frac{n-1-\varrho}{n\varrho}\left(1 - e^{-\frac{n\varrho\varphi}{(n-1)(1+\varrho)}}\right)\right] \cos \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{y}{l}.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Im allgemeinen beträgt die Plattenbewehrung maximal 1%. Setzen wir ferner $\varepsilon_{max} \approx 0{,}4$ und $n_{max} \approx 10$, so wird

$$\varrho_{max} = 6 \cdot 0{,}16 \cdot 9 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}1 .$$

Mit diesen Zahlenwerten erhalten wir dann aus (55) die in Abb. 8 dargestellten Kurven, die eine erhebliche Belastung der bewehrten Querschnitte zugunsten einer Entlastung der unbewehrten y-Richtung zeigen. In Abb. 8c, d sind die jeweils auf den Beton- bzw. Stahlteil entfallenden Momente in ihrer zeitlichen Abhängigkeit dargestellt. Die außerdem strichpunktiert eingetragenen

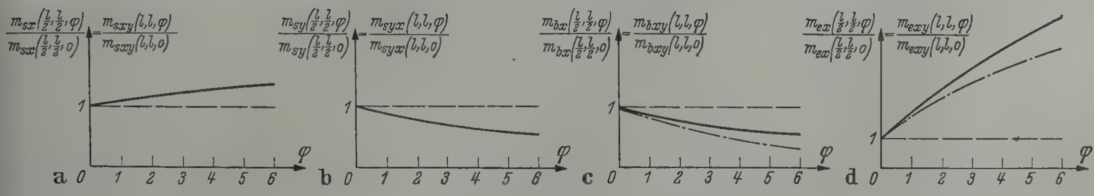

Abb. 8.

Kurven sind diejenigen, die sich ergeben würden, wenn mit den anfänglich vorhandenen, aus der üblichen Theorie elastischer Platten berechenbaren Momenten

$$m_{sx}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right) = - m_{sxy}(l, l, 0) = \frac{q\,l^2}{4\,\pi^2}\,\frac{1+2\,\varrho}{1+\varrho}$$

die Teilschnittlasten berechnet worden wären ohne Rücksicht darauf, daß die Gesamtschnittlasten $m_{sx}$ bzw. $m_{sxy}$ selbst zeitlich veränderlich sind. Es ergeben sich für diesen Fall aus (35) und (36) nach einiger Rechnung

$$\widetilde{m}_{bx}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \varphi\right) = - \widetilde{m}_{bxy}(l, l, \varphi) = \frac{q\,l^2}{4\,\pi^2}\,\frac{n-1-2\,\varrho}{(n-1)\,(1+\varrho)}\, e^{-\frac{2\,n\,\varrho\,\varphi}{(n-1)\,(1+2\,\varrho)}},$$

$$\widetilde{m}_{ex}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \varphi\right) = - \widetilde{m}_{exy}(l, l, \varphi) = \frac{q\,l^2}{4\,\pi^2}\,\frac{2\,n\,\varrho}{(n-1)\,(1+\varrho)}\left[1 + \frac{n-1-2\,\varrho}{2\,n\,\varrho}\left(1 - e^{-\frac{2\,n\,\varrho\,\varphi}{(n-1)\,(1+2\,\varrho)}}\right)\right].$$

Dabei erkennen wir, daß die tatsächlich verbleibenden Momente im Beton- bzw. Stahlteil erheblich größer sein können als die unter der Annahme konstanter Gesamtschnittlasten berechneten Werte.

c) Die mit $p_z = q \cdot \sin\frac{\pi\,x}{a} \sin\pi\frac{y}{b}$ sowie durch konstante Randdruckkräfte $D_x$ und $D_y$ belastete Platte. Der *Dischinger*-Effekt. Aus der allgemeinen Lösung (52) und (53) verbleibt allein das erste Reihenglied $j = k = 1$ und wir erhalten mit

$$\delta = \pi^2\left(\frac{D_x}{a^2} + \frac{D_y}{b^2}\right)$$

sowie

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{i0} &= \frac{\pi^4 E_b J_{ix}}{a^4}\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\left[1 + \frac{J_{iy}}{J_{ix}}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{\pi^4 E_b J_{iy}}{b^4}\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left[1 + \frac{J_{ix}}{J_{iy}}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right],\\
\lambda_{b0} &= \frac{\pi^4 E_b \bar{J}_{bx}}{a^4}\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\left[1 + \frac{\bar{J}_{by}}{\bar{J}_{bx}}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{\pi^4 E_b \bar{J}_{by}}{b^4}\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left[1 + \frac{\bar{J}_{bx}}{\bar{J}_{by}}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right],\\
\lambda_{e0} &= \frac{\pi^4\, n\, E_b \bar{J}_{ex}}{a^4}\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\left[1 + \frac{\bar{J}_{ey}}{\bar{J}_{ex}}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{\pi^4\, n\, E_b \bar{J}_{ey}}{b^4}\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left[1 + \frac{\bar{J}_{ex}}{\bar{J}_{ey}}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

schließlich aus (52) und (53)

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{q}{\lambda_{i0}-\delta}\left[1 + \frac{\lambda_{b0}}{\lambda_{e0}-\delta}\left(1 - e^{-\frac{\lambda_{e0}-\delta}{\lambda_{i0}-\delta}\varphi}\right)\right] \sin\pi\frac{x}{a}\,\sin\pi\frac{y}{b},\\
m_{sx} &= \frac{q\,\pi^2 E_b}{a^2\,(\lambda_{i0}-\delta)}\left[J_{ix} + \frac{(J_{ix}\lambda_{b0} - \bar{J}_{bx}\lambda_{i0}) + \bar{J}_{bx}\,\delta}{\lambda_{e0}-\delta}\left(1 - e^{-\frac{\lambda_{e0}-\delta}{\lambda_{i0}-\delta}\varphi}\right)\right] \sin\pi\frac{x}{a}\,\sin\pi\frac{y}{b},\\
m_{sxy} &= -\frac{q\,\pi^2 E_b}{a\,b\,(\lambda_{i0}-\delta)}\left[J_{ix} + \frac{(J_{ix}\lambda_{b0} - \bar{J}_{bx}\lambda_{i0}) + \bar{J}_{bx}\,\delta}{\lambda_{e0}-\delta}\left(1 - e^{-\frac{\lambda_{e0}-\delta}{\lambda_{i0}-\delta}\varphi}\right)\right] \cos\pi\frac{x}{a}\,\cos\pi\frac{y}{b},\\
m_{syx} &= -\frac{q\,\pi^2 E_b}{a\,b\,(\lambda_{i0}-\delta)}\left[J_{iy} + \frac{(J_{iy}\lambda_{b0} - \bar{J}_{by}\lambda_{i0}) + \bar{J}_{by}\,\delta}{\lambda_{e0}-\delta}\left(1 - e^{-\frac{\lambda_{e0}-\delta}{\lambda_{i0}-\delta}\varphi}\right)\right] \cos\pi\frac{x}{a}\,\cos\pi\frac{y}{b},\\
m_{sy} &= \frac{q\,\pi^2 E_b}{b^2\,(\lambda_{i0}-\delta)}\left[J_{iy} + \frac{(J_{iy}\lambda_{b0} - \bar{J}_{by}\lambda_{i0}) + \bar{J}_{by}\,\delta}{\lambda_{e0}-\delta}\left(1 - e^{-\frac{\lambda_{e0}-\delta}{\lambda_{i0}-\delta}\varphi}\right)\right] \sin\pi\frac{x}{a}\,\sin\pi\frac{y}{b}.
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Wir erkennen hieran, daß, zunächst einmal den Ausdruck $\lambda_{e0}-\delta$ betrachtend, der zeitabhängige Teil bei wachsenden Axiallasten, also mit wachsenden Werten $\delta$ größer wird. Während für $\lambda_{e0}-\delta>0$ das zeitliche Anwachsen schwächer als linear mit $\varphi$ sich vollzieht, haben wir für $\lambda_{e0}-\delta<0$ ($\lambda_{i0}-\delta>0$ vorausgesetzt) ein mit $\varphi$ stärker als lineares Anwachsen. Der Grenzfall $\lambda_{e0}-\delta=0$ führt, wenn man beachtet, daß nach der *L'Hospital*schen Regel

$$\lim_{(\lambda_{e0}-\delta)\to 0}\frac{1-e^{-\frac{\lambda_{e0}-\delta}{\lambda_{i0}-\delta}\varphi}}{\lambda_{e0}-\delta}=\lim_{(\lambda_{e0}-\delta)\to 0}\frac{\frac{\varphi}{\lambda_{i0}-\delta}\,e^{-\frac{\lambda_{e0}-\delta}{\lambda_{i0}-\delta}\varphi}}{1}=\frac{\varphi}{\lambda_{i0}-\delta}$$

ist, zu einer linearen Zunahme der Verformungen und der Gesamtschnittlasten mit $\varphi$. Hier ergeben sich also dieselben Erscheinungen, die man auch bei der genauen Untersuchung des Längskraft-Biegungs-Problems für Stäbe[1] beobachten kann. Während der Ausdruck $\lambda_{e0}-\delta$ nur bei den zeitabhängigen Verformungen von Einfluß ist, wirkt sich der jeweils im Nenner stehende Ausdruck $\lambda_{i0}-\delta$ auch auf die elastischen Verformungsanteile aus. Bei kleinerwerdendem $\lambda_{i0}-\delta$ ist das Anwachsen der zeitabhängigen Verformungen und damit der zugehörigen Schnittlasten weitaus stärker als das der elastischen Anteile.

Der Grenzfall

$$\lambda_{i0}-\delta=0 \tag{58}$$

bedeutet ein Versagen der Platte, und dies entspricht gerade ihrer Beulbedingung. Auf diesen starken Einfluß einer Axialbelastung, die in der Größenordnung der *Euler*last liegt, auf die zeitabhängigen Verformungen und Schnittlastzuwächse hat erstmals *Dischinger*[2] hingewiesen, der diesen Effekt an einem Stabe ohne Bewehrung untersuchte. Die zweidimensionale Verallgemeinerung dieser Untersuchungen, also die unbewehrte Betonplatte, ergibt sich aus (57), wenn wir $J_{ex}=J_{ey}=0$, $J_{ix}=J_{iy}=J_{bx}=J_{by}=J=d^3/12$, also

$$\lambda_{i0}=\lambda_{b0}=\frac{\pi^4 E_b J}{a^4}\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2=\lambda\,,\qquad \lambda_{e0}=0 \tag{59a}$$

setzen. Mit der Abkürzung

$$\nu=\frac{\lambda}{\delta}=\frac{\pi^2 E_b J\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}{a^2\left[D_x+D_y\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]} \tag{59b}$$

folgt aus (57) schließlich

$$\left.\begin{aligned}
w&=\frac{q\,a^4}{\pi^4 E_b J}\,\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}\,\frac{\nu}{\nu-1}\left[1+\nu\left(e^{\frac{\varphi}{\nu-1}}-1\right)\right]\sin\pi\frac{x}{a}\,\sin\pi\frac{y}{b}\,,\\
m_{sx}&=\frac{q\,a^2}{\pi^2}\,\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}\,\frac{\nu}{\nu-1}\,e^{\frac{\varphi}{\nu-1}}\sin\pi\frac{x}{a}\,\sin\pi\frac{y}{b}\,,\\
m_{sxy}=m_{syx}&=-\frac{q\,a^3}{\pi^2 b}\,\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}\,\frac{\nu}{\nu-1}\,e^{\frac{\varphi}{\nu-1}}\cos\pi\frac{x}{a}\,\cos\pi\frac{y}{b}\,,\\
m_{sy}&=\frac{q\,b^2}{\pi^2}\,\frac{1}{\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2}\,\frac{\nu}{\nu-1}\,e^{\frac{\varphi}{\nu-1}}\sin\pi\frac{x}{a}\,\sin\pi\frac{y}{b}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Zum Vergleich werden die Formeln von *Dischinger* für einen beidseitig gelenkig gelagerten Stab angegeben. Für eine Querbelastung $q(x)=q_0\sin\pi\frac{x}{l}$ hat man bei gleichzeitiger Wirkung einer Axiallast $P$ mit

$$\nu=\frac{P_{kr}}{P}=\frac{\pi^2 E_b J}{P\,l^2}$$

[1] Hierüber erscheint in Kürze eine Arbeit vom Verfasser im Österr. Ing.-Arch.

[2] *F. Dischinger*, Bauingenieur, 18 (1937), S. 487, 538 u. 595.

die Durchbiegungen und das Biegemoment

$$w(x) = \frac{q_0\, l^4}{\pi^4\, E_b\, J}\, \frac{\nu}{\nu - 1} \left[1 + \nu \left(e^{\frac{\varphi}{\nu - 1}} - 1\right)\right] \sin \pi\, \frac{x}{l}\,, \qquad M(x) = \frac{q_0\, l^2}{\pi^2}\, \frac{\nu}{\nu - 1}\, e^{\frac{\varphi}{\nu - 1}} \sin \pi\, \frac{x}{l}\,.$$

**6. Zusammenfassung.** Das Problem des Plattenverbundes läßt sich, nachdem man bei der Darstellung der maßgebenden Beziehungen weitgehend in Analogie zur Theorie elastischer orthotroper Platten vorgeht, letztlich auf ein System dreier simultaner Integro-Differentialgleichungen für die Mittelflächenverschiebungen zurückführen, die man für konstante Steifigkeiten mit Hilfe von Produktansätzen lösen kann. Im allgemeinen Falle der veränderlichen Bewehrung wird eine exakte Lösung kaum noch zu erreichen sein. Man kann in solchen Fällen nach der Methode *Sattler* mit Hilfe angenommener Zeitabhängigkeiten die Gleichungen zunächst einmal auf reine, nur Ableitungen nach $x$ und $y$ enthaltende Differentialgleichungen zurückführen, für die dann z. B. im Sinne des *Ritz*schen Verfahrens eine Näherungslösung aufzufinden wäre.

Abschließend sei noch bemerkt, daß mit der gelungenen Darstellung des Zusammenhanges zwischen den (i. a. zeitabhängigen) Schnittlasten und den Plattenverzerrungen nunmehr auch im Rahmen der *Love*schen Näherung der Schalenverbund allgemein untersucht werden kann. Durch geeignete Einführung der Vorspannstahlquerschnitte in die ideellen Gesamtquerschnittswerte kann man auch das Problem der vorgespannten Flächentragwerke erfassen.

(Eingegangen am 1. Februar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Privat-Dozent Dr.-Ing. *R. Trostel*, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergsstraße 34, Lehrstuhl für Mechanik.

# Über gesteuerte Anheizvorgänge bei Zylindern*

Von **R. Ansorge**

**1. Einleitung.** Eine Reihe von Arbeiten der letzten Jahre befaßt sich mit der theoretischen Behandlung gesteuerter Anheiz- und Abkühlungsvorgänge. Das sind Vorgänge, bei denen die Grenzschicht des einen Körper $K$ umgebenden Mediums nach einem gewissen Programm aufgeheizt oder abgekühlt wird. Gefragt wird nach der dadurch bedingten, mit der Zeit veränderlichen Temperaturverteilung in $K$. Die Integration der diese Vorgänge beschreibenden Anfangs-Randwertprobleme darf vom Standpunkt der reinen Mathematik unter der Annahme temperaturunabhängiger physikalischer Größen (Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme usw.) als gelöst gelten[1]. Die Lösungen erscheinen in Form unendlicher Reihen, die numerisch oft nur mit großem Arbeitsaufwand auswertbar sind. Das Problem wird naturgemäß einfacher, wenn man die Zahl der auftretenden Ortskoordinaten herabdrücken kann.

In den technischen Anwendungen tritt häufig dic Frage nach der Temperaturverteilung in Vollzylindern bei gesteuerten Anheiz- (oder Abkühlungs-)-vorgängen auf. Diese Aufgaben wurden theoretisch bisher meist unter Voraussetzungen behandelt, die es nach Einführung von Zylinderkoordinaten $r, \varphi, z$ ermöglichten, das Problem unabhängig von $\varphi$ und insbesondere von $z$ zu behandeln. Solche Voraussetzungen sind: völliger Temperaturausgleich innerhalb des Zylinders vor Beginn des Anheizvorganges, nur zeitabhängiges Aufheizprogramm des Außenraumes, unendliche Länge des Zylinders. Zur Begründung der letztgenannten Voraussetzung wird die Erfahrungstatsache herangezogen, daß für den Fall großer Zylinderlänge gegen den Zylinderdurchmesser die Lösung des ebenen Problems (Abhängigkeit der Lösung nur von $r$ und der Zeit $t$) die gemessene Temperaturverteilung gut wiedergibt. Das kann natürlich nur für Zylinderpunkte gelten, die nicht in unmittelbarer Nähe der Deckflächen liegen.

Es erhebt sich die Frage nach der Größe der Einflußzonen der Deckflächen und bei gegebenem Zylinderdurchmesser nach der minimalen Zylinderlänge, für die der Zylinder bei gegebener zulässiger Abweichung noch als unendlich lang betrachtet werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, darauf für einfache, in der Technik häufig vorkommende Spezialfälle eine befriedigende Antwort zu geben.

Da überdies der Einfluß der meist nur schwer vorauszubestimmenden Wärmeübergangszahl $\alpha$ interessiert, werden die numerischen Untersuchungen für verschiedene Größenordnungen des dimensionslosen Parameters $\lambda/\alpha\, r_0$ (siehe Ziff. 2) durchgeführt. Dabei möge $\alpha$ den gesamten Wärmeübergang durch Leitung, Konvektion und Strahlung berücksichtigen.

**2. Verwendete Bezeichnungen.** Es soll bedeuten

| | |
|---|---|
| $\lambda \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm sek Grad}}\right]$ | die Wärmeleitfähigkeit, |
| $\varrho \left[\frac{g}{\text{cm}^3}\right]$ | die Dichte, |
| $c \left[\frac{\text{cal}}{\text{g grad}}\right]$ | die spezifische Wärme, |
| $\alpha \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\ \text{sek Grad}}\right]$ | die Wärmeübergangszahl, |
| $T$ [Grad] | die Temperatur im Zylinder, |
| $T_A$ [Grad] | die Zylinderanfangstemperatur, |
| $T_E$ [Grad] | die Temperatur im Zylinder endlicher Länge, |
| $T_\infty$ [Grad] | die Temperatur im unendlich langen Zylinder, |

* Auszug aus der gleichnamigen, von der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Bergakademie Clausthal genehmigten Dissertation des Verfassers; Referent: Prof. Dr. phil. *H. König*, Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. *H. Menzel*.

[1] *H. Jäckel*, Ing.-Arch. 26 (1958), 146.

| | | |
|---|---|---|
| $\Phi$ | [Grad] | die Temperatur der Grenzschicht des den Körper umgebenden Mediums (Außenraumtemperatur), |
| $\Delta$ | | den Laplace-Operator, |
| $J_0, J_1$ | | die Zylinderfunktion erster Art (Besselfunktionen), |
| $r_0$ | [cm] | den Zylinderhalbmesser, |
| $2\,z_0$ | [cm] | die Zylinderlänge, |
| $\varkappa = \frac{z_0}{r_0}$ | | eine Abkürzung und demgemäß |
| $Z_\varkappa$ | | einen Zylinder mit $z_0 = \varkappa\, r_0$, |
| $T_{z\varkappa}$ | [Grad] | die Temperatur im Zylinder $Z_\varkappa$. |

**3. Die Lösung des Anfangs-Randwertproblems für den Vollzylinder.** Ruft eine Wärmezufuhr oder ein Wärmeentzug in einem bezüglich der Wärmeleitung homogenen und isotropen Körper innerhalb des betrachteten Temperaturbereiches keine Änderung des Aggregatzustandes hervor, und entsteht oder vergeht im Körper selbst keine Wärme, so werden die gesteuerten Anheizvorgänge durch

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\varrho\, c}\,\Delta T\,, \qquad (T)_{t=0} = T_A\,, \qquad \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_F + (T)_F = \Phi \quad \text{für} \quad t > 0 \tag{3.1}$$

beschrieben. Dabei soll $F$ darauf hindeuten, daß die Werte längs der Körperoberfläche zu nehmen sind, während $n$ die nach außen weisende Flächennormale darstellen soll.

Bei der nun folgenden Betrachtung des Vollzylinders soll zwar auch von einigen der eingangs genannten vereinfachenden Annahmen Gebrauch gemacht werden, nämlich

1. $\alpha$ hat für alle Punkte der Zylinderoberfläche den gleichen Wert,

2. $T_A =$ konst, d. h. völliger Temperaturausgleich innerhalb des Zylinders vor Beginn des Aufheizens,

3. Das Aufheizprogramm $\Phi$ ist nur zeitabhängig, also $\Phi = \Phi(t)$

(wir haben es dann mit einem zylindersymmetrischen Problem zu tun), jedoch behalten wir die Abhängigkeit von $z$ bei. Dann lautet (3.1)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\varrho\, c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \qquad T = T(r, z, t)\,,\\
T(r, z, 0) &= T_A\,,\\
\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} &= 0\,,\\
&\left.\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=z_0} + T(r, z_0, t) &= \Phi(t)\,,\\
\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0} + T(r_0, z, t) &= \Phi(t)\,,\\
-\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=-z_0} + T(r, -z_0, t) &= \Phi(t)
\end{aligned}\right\}\ \text{für} \quad t > 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Für den Fall $T_A \neq \Phi(0)$ kann von der Lösung des Problems (3.2) bei $t = 0$ nur verlangt werden, daß sie im Innern des Zylinders mit $T_A$ übereinstimmt, während sie für $t > 0$ auch den Temperaturverlauf auf der Oberfläche richtig beschreiben soll.

Es bedeutet nur eine Verschiebung der Temperaturskala, wenn wir $T_A = 0$ setzen. Bestimmen wir $T$ aus (3.2) mit $T_A = 0$, so wird der Fall $T_A \neq 0$ dadurch erledigt, daß man $T$ durch $T - T_A$ und $\Phi(t)$ durch $\Phi(t) - T_A$ ersetzt.

Mit der von *Kneschke*[1] eingeführten, von einem Parameter $\tau$ abhängenden Einflußfunktion $G(r, z, \tau, t)$ versuchen wir den Ansatz

$$T(r, z, t) = G(r, z, 0, t) + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \bar\tau} G(r, z, \bar\tau, t - \tau)\right]_{\bar\tau = \tau} d\tau - G(r, z, t, 0)\,. \tag{3.3}$$

Dieser erfüllt bereits die Forderung $T(r, z, 0) = 0$. Er erfüllt auch die weiteren Gleichungen der Aufgabe (3.3), wenn man

$$G(r, z, \tau, t) = -\Phi(\tau)\, g(r, t)\, h(z, t) \tag{3.4}$$

---

[1] *A. Kneschke*, Ing.-Arch. 24 (1956), 77.

setzt und $g$ und $h$ folgenden Bedingungen unterwirft:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\varrho c}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right), \\ g(r, 0) &= 1, \\ \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_{r=r_0} + g(r_0, t) &= 0 \qquad \text{für } t > 0, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_{r=0} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\varrho c}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \\ h(z, 0) &= 1, \\ \left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{z=z_0} + h(z_0, t) &= 0, \\ -\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{z=-z_0} + h(-z_0, t) &= 0 \end{aligned}\right\} & \text{ für } t > 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Das System (3.5) kann durch den Ansatz

$$g(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(r)\, e^{-\omega_n^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t}$$

gelöst werden, wenn man die $u_n(r)$ aus der Eigenwertaufgabe

$$\left.\begin{aligned} u_n'' + \frac{1}{r} u_n' + \left(\frac{\omega_n}{r_0}\right)^2 u_n &= 0, \\ \frac{\lambda}{\alpha} u_n'(r_0) + u_n(r_0) &= 0, \\ u_n'(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

bestimmt und dann die Koeffizienten $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ nach dem Entwicklungssatz [1] so wählt, daß $\sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(r)$ im Innern des Zylinders mit der Entwicklung der Funktion $f(r) \equiv 1$ nach den Eigenfunktionen der Aufgabe (3.7) übereinstimmt. Es ist

$$u_n(r) = J_0\left(\omega_n \frac{r}{r_0}\right).$$

Dabei stellen die $\omega_n$ die positiven Lösungen der Eigenwertgleichung

$$J_0(\omega) = \frac{\lambda}{\alpha r_0}\, \omega\, J_1(\omega) \tag{3.8}$$

dar.

Für $A_n$ erhält man den Ausdruck

$$A_n = \frac{2\frac{\lambda}{\alpha r_0}}{\left[1 + \omega_n^2 \frac{\lambda^2}{\alpha^2 r_0^2}\right] J_0(\omega_n)}. \tag{3.9}$$

Da wir später neben $\varkappa$ auch den Paramter $\lambda/\alpha r_0$ variieren und überdies zu dimensionslosen Koordinaten übergehen wollen, schreiben wir statt $g(r, t)$ in Zukunft $g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right)$ und erhalten

$$g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\frac{\lambda}{\alpha r_0} J_0\left(\omega_n \frac{r}{r_0}\right)}{\left[1 + \omega_n^2 \frac{\lambda^2}{\alpha^2 r_0^2}\right] J_0(\omega_n)}\, e^{-\omega_n^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t}. \tag{3.10}$$

[1] *Courant-Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik Bd. I, Berlin 1924.

Auf gleiche Weise lösen wir (3.6). Es ergibt sich

$$h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{z}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\Omega_m \varkappa) \cos\left(\Omega_m \frac{z}{r_0}\right)}{\cos(\Omega_m \varkappa) \sin(\Omega_m \varkappa) + \Omega_m \varkappa} e^{-\Omega_m^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t}. \tag{3.11}$$

Die Eigenwerte $\Omega_m$ sind dabei die positiven Lösungen der Gleichung

$$\operatorname{ctg}(\Omega \varkappa) = \frac{\lambda}{\alpha r_0} \Omega. \tag{3.12}$$

Mit (3.3), (3.4), (3.10) und (3.11) lautet somit die (eindeutige) Lösung von (3.2) (die wir sogleich für beliebiges $T_A = \text{konst}$ formulieren) abkürzend

$$T(r, z, t) = \Phi(t) + [T_A - \Phi(0)]\, g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{z}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) -$$
$$- \int_0^t \frac{\partial \Phi(\tau)}{d\tau} g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2}(t-\tau)\right) h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{z}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2}(t-\tau)\right) d\tau. \tag{3.13}$$

Dies gilt für $T_A \neq \Phi(0)$ bei $t = 0$ nur für das Innere des Zylinders.

Die Lösung des ebenen Problems (Unabhängigkeit von $z$ beim beidseitig unendlich langen Zylinder) erhält man aus (3.13), wenn man dort $h \equiv 1$ setzt.

**4. Die Lösung des ebenen Problems als Grenzfall der Lösung für den Zylinder endlicher Länge.** Die in der Literatur angegebenen Beispiele zur Ermittlung der Temperaturverteilung in zylindrischen Körpern (Vollzylinder, Rohre usw.) bei gesteuerten Anheizvorgängen behandeln fast stets das ebene Problem. Die Verfasser gehen dabei (z. T. unter Berufung auf die Erfahrung) von der Voraussetzung aus, daß für große $\varkappa$ die Lösung des ebenen Problems die gesuchte Lösung für den endlich langen Zylinder hinreichend genau wiedergibt (wenigstens für die von den Zylinderenden hinreichend weit entfernten Zylinderpunkte, z.B. den Zylindermittelpunkt). Genauer formuliert heißt dies: Es wird unterstellt, daß die Lösung im Falle des endlich langen Zylinders für $\varkappa \to \infty$ gegen die Lösung des ebenen Problems konvergiert, und zwar gleichmäßig innerhalb des betrachteten Temperaturbereichs, d. h. vor allem gleichmäßig für alle $t$ aus $0 \leqq t \leqq t_0$ mit beliebig großem, jedoch als gegeben zu betrachtendem $t_0$.

Wir wollen diese Annahme anhand der Lösung (3.13) wenigstens durch einen entsprechenden Beweis für die Punkte der Zylindermittelebene ($z = 0$) stützen. Wegen der Beschränktheit von $g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right)$ und

$$\int_0^t \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2}(t-\tau)\right) d\tau$$

für $0 \leqq t \leqq t_0$ genügt es, zu zeigen, daß $h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; 0, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right)$ mit $\varkappa \to \infty$ gleichmäßig für alle nicht negativen $t \leqq t_0$ gegen 1 konvergiert. Das ist in der Tat der Fall.

Zum Beweise vermerken wir zunächst, daß nach (3.12) die Werte $\Omega_m \varkappa$ ($m = 1, 2, \ldots$) aufgefaßt werden können als die Schnittpunkte der Geraden $y = \frac{\lambda}{\alpha r_0 \varkappa} x$ mit $y = \operatorname{ctg} x$. Wegen $\frac{\lambda}{\alpha r_0 \varkappa} > 0$ folgt daraus

$$(m-1)\pi < \Omega_m \varkappa < \frac{2m-1}{2}\pi, \tag{4.1}$$

also

$$\cos(\Omega_m \varkappa) \sin(\Omega_m \varkappa) > 0. \tag{4.2}$$

Weiterhin erkennt man sofort, daß

$$|\sin(\Omega_m \varkappa)| > |\sin(\Omega_{m+1} \varkappa)|. \tag{4.3}$$

ist. Aus (4.1) und (4.2) folgt

$$\cos(\Omega_m \varkappa) \sin(\Omega_m \varkappa) + \Omega_m \varkappa < \cos(\Omega_{m+1} \varkappa) \sin(\Omega_{m+1} \varkappa) + \Omega_{m+1} \varkappa. \tag{4.4}$$

Beachtet man $\Omega_m < \Omega_{m+1}$, so resultiert aus (4.1) bis (4.4), daß $h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; 0, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right)$ für $t \geqq 0$ eine alternierende Reihe darstellt, bei der die Beträge der Glieder eine eigentlich monoton fallende Folge bilden. Daraus folgt

$$A_{M+1}^p = \left| \sum_{m=M+1}^{M+p} \frac{2 \sin(\Omega_m \varkappa)}{\cos(\Omega_m \varkappa) \sin(\Omega_m \varkappa) + \Omega_m \varkappa} e^{-\Omega_m^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t} \right| <$$

$$< \frac{2\,|\sin(\Omega_{M+1}\varkappa)|}{\cos(\Omega_{M+1}\varkappa)\sin(\Omega_{M+1}\varkappa) + \Omega_{M+1}\varkappa} e^{-\Omega_{M+1}^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t} < \frac{2}{\Omega_{M+1}\varkappa} < \frac{2}{M\pi},$$

somit sicher $A_{M+1}^p < \varepsilon$ für $M \geqq \frac{2}{\pi \varepsilon} = M_0(\varepsilon)$, und $M_0$ hängt nicht ab von $\varkappa$ und $t$.

Die Entwicklung $h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; 0, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right)$ konvergiert folglich gleichmäßig für alle $\varkappa$ und $t \geqq 0$. Wir haben daher die Möglichkeit, den Grenzübergang $\varkappa \to \infty$ in dieser Entwicklung im wesentlichen gliedweise durchführen zu können. Hierzu werden noch die Grenzwerte

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \Omega_m, \quad \lim_{\varkappa \to \infty} \Omega_m^2 t, \quad \lim_{\varkappa \to \infty} \Omega_m \varkappa$$

für beschränkte $m \leqq M$ und $0 \leqq t \leqq t_0$ benötigt. Aus (4.1) folgt

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \Omega_m = \lim_{\varkappa \to \infty} \Omega_m^2 t = 0 \tag{4.5}$$

für beschränkte $m$ und $t$. Gleichung (3.19) ergibt

$$\operatorname{ctg}(\Omega_m \varkappa) = \frac{\lambda}{\alpha r_0} \Omega_m = \operatorname{tg}\left(\frac{2m-1}{2}\pi - \Omega_m \varkappa\right),$$

also

$$\frac{2m-1}{2}\pi - \Omega_m \varkappa = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0} \Omega_m\right),$$

wobei wegen

$$0 < \frac{2m-1}{2}\pi - \Omega_m \varkappa < \frac{\pi}{2}$$

rechter Hand der Hauptwert zu nehmen ist. Mit (4.5) folgt daher

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \Omega_m \varkappa = \frac{2m-1}{2}\pi \tag{4.6}$$

für alle beschränkten $m$.

Wegen (4.5) und (4.6) existiert somit zu gegebenem positiven $\varepsilon$ bei gegebenem $M$ und $t_0$ für alle $m \leqq M$ und $t \leqq t_0$ ein

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(M, \varepsilon, t_0)$$

derart, daß für alle $\varkappa > \varkappa_1$ die Beziehung

$$\left| \sum_{m=1}^{M} \frac{2 \sin(\Omega_m \varkappa)}{\cos(\Omega_m \varkappa)\sin(\Omega_m \varkappa) + \Omega_m \varkappa} e^{-\Omega_m^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t} - \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots + (-1)^{M-1} \frac{1}{2M-1}\right] \right| < \varepsilon$$

besteht. Auf Grund der *Leibniz*schen Reihe ist

$$\left| \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{1}{2m-1}\right] - 1 \right| < \varepsilon$$

für $m \geqq M_1(\varepsilon)$, also für alle positiven $t \leqq t_0$

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\Omega_m \varkappa)}{\cos(\Omega_m \varkappa)\sin(\Omega_m \varkappa) + \Omega_m \varkappa} e^{-\Omega_m^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t} - 1 \right| < 3\varepsilon,$$

wenn man nur

$$\varkappa > \varkappa_1(\overline{M}(\varepsilon), \varepsilon, t_0) = \bar{\varkappa}(\varepsilon, t_0)$$

wählt mit

$$\overline{M}(\varepsilon) = \operatorname{Max}\{M_0(\varepsilon), M_1(\varepsilon)\}.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Unklar bleibt natürlich weiterhin, was bei der Approximation der gesuchten Temperaturverteilung in einem „hinreichend langen" Zylinder durch die in einem beidseitig unendlich langen Zylinder unter „hinreichend lang" zu verstehen ist.

Diese Frage wollen wir in den Fällen konstanter Außenraumtemperatur* und zeitlich linearer Außenraumaufheizung numerisch untersuchen. Wir stellen deshalb zunächst die zugehörigen Lösungen als Spezialfälle von (3.13) zusammen.

**5. Die Lösungen in den Fällen konstanter Außenraumtemperatur und zeitlich linearer Außenraumaufheizung.** Bei konstanter Außenraumtemperatur

$$\Phi(t) = \vartheta$$

liefert (3.13) für den Zylinder endlicher Länge

$$T_E = \vartheta + (T_A - \vartheta)\, g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{z}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right). \tag{5.1}$$

Entsprechend erhalten wir für den beidseitig unendlich langen Zylinder

$$T_\infty = \vartheta + (T_A - \vartheta)\, g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right). \tag{5.2}$$

Bei zeitlich linearer Außenraumaufheizung

$$\Phi(t) = \Theta t + \Phi_0$$

ergibt (3.13)

$$\begin{aligned} T_E = {} & \Theta t + \Phi_0 + (T_A - \Phi_0)\, g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{z}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) \\ & - \Theta \int_0^t g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} \tau\right) h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{z}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} \tau\right) d\tau, \end{aligned} \tag{5.3}$$

bzw.

$$T_\infty = \Theta t + \Phi_0 + (T_A - \Phi_0)\, g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t\right) - \Theta \int_0^t g\left(\frac{\lambda}{\alpha r_0}; \frac{r}{r_0}, \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} \tau\right) d\tau. \tag{5.4}$$

Der Ausdruck (5.4) kann für große $t$ geschlossen dargestellt werden; denn führt man die Integration aus und vernachlässigt die Glieder mit $e^{-\omega_0^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_0^2} t}$, so erhält man

$$T_\infty(r, t) = \Theta t + \Phi_0 - \frac{\Theta \varrho c r_0^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \frac{\lambda}{\alpha r_0} J_0\left(\omega_n \frac{r}{r_0}\right)}{\left(1 + \omega_n^2 \frac{\lambda^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) J_0(\omega_n) \left(\frac{\omega_n}{r_0}\right)^2} \quad \text{für große } t. \tag{5.4a}$$

Mit (3.9) steht rechts die Reihe

$$\mathfrak{F}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n J_0\left(\omega_n \frac{r}{r_0}\right)}{\left(\frac{\omega_n}{r_0}\right)^2}.$$

$\mathfrak{F}(r)$ genügt im Innern des Zylinders wegen der dort bestehenden Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} A\, J_0\left(\omega_n \frac{r}{r_0}\right) = 1$$

der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$r \mathfrak{F}''(r) + \mathfrak{F}'(r) + r = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\frac{\lambda}{\alpha} \mathfrak{F}'(r_0) + \mathfrak{F}(r_0) = 0, \quad \mathfrak{F}'(0) = 0.$$

---

* Dieser Fall wird häufig nicht als gesteuerter Anheizvorgang gewertet, sondern als „natürlicher Aufheizvorgang" bezeichnet. Doch liegt auch im Konstanthalten der Umgebungstemperatur eine Steuerung, weshalb wir diesen Fall terminologisch nicht ausklammern.

Die Lösung ist

$$\mathfrak{F}(r) = \frac{r_0}{2}\left(\frac{r_0}{2} + \frac{\lambda}{\alpha}\right) - \frac{r^2}{4},$$

so daß wir wegen der Eindeutigkeit der Lösung bei zeitlich linearer Außenraumaufheizung für große $t$ den geschlossenen (und von $T_A$ unabhängigen) Ausdruck

$$T_\infty(r, t) = \Theta\, t + \Phi_0 - \frac{\Theta\, \varrho\, c}{\lambda}\left[\frac{r_0}{2}\left(\frac{r_0}{2} + \frac{\lambda}{\alpha}\right) - \frac{r^2}{4}\right] \tag{5.4b}$$

erhalten.

Nach einiger Zeit ist also die Differenz zwischen Außenraumtemperatur und Zylindertemperatur nur noch von $r$ abhängig, für ein bestimmtes $r$ somit konstant. Diese Erscheinung tritt natürlich auch beim Zylinder endlicher Länge auf, doch ist hier die nur von $r$ und $z$ abhängige Temperaturdifferenz nicht geschlossen darstellbar.

Die Lösungen (5.2), (5.4) und (5.4b) für den beidseitig unendlich langen Zylinder finden sich im wesentlichen schon bei anderen Autoren: (5.2) steht für $\vartheta = 0$ z. B. bei *Gröber-Erk*[1], (5.4) und (5.4b) wurden für $T_A = \Phi_0$ von *Kneschke* angegeben.

**6. Der zeitliche Verlauf der Temperatur im Zylindermittelpunkt. bzw auf der Zylinderachse.**

a) Die den numerischen Untersuchungen zugrunde gelegten Werte der Parameter $\lambda/\alpha\, r_0$ und $\varkappa$. Um nun den Einfluß von $\varkappa$ auf den zeitlichen Temperaturverlauf im Innern des Zylinders studieren zu können, wollen wir die Mittelpunktstemperatur ($r = z = 0$) für verschiedene $\varkappa$ bei konstanter Außenraumtemperatur und zeitlich linearer Außenraumaufheizung auftragen. Wir wählen $\varkappa = 1, 2, 4, 8, \infty$. Von der Veränderlichen $t$ gehen wir zu der dimensionslosen Veränderlichen

$$\bar{t} = \frac{\lambda}{\varrho\, c\, r_0^2}\, t$$

über. Eine Änderung von $\lambda$, $\varrho$, $c$, $r_0$ bedeutet dann in $t$-Richtung lediglich eine Änderung des Maßstabes.

Von wesentlichem Einfluß auf die Temperaturverteilung ist weiterhin die meist nur schwer vorauszubestimmende Wärmeübergangszahl $\alpha$. Neben $\varkappa$ variieren wir deshalb den (dimensionslosen) Parameter $\lambda/\alpha\, r_0$, dem wir die Werte 0,1; 1; 10 beilegen. In diesen Bereich dürften neben vielen anderen Fällen z.B. bei etwa 0,5 cm $\leqq r_0 \leqq$ 4 cm und den (bei Luft als Umgebungsmedium) vorkommenden Wärmeübergangszahlen der Größenordnung nach Erden, Baustoffe (ohne Hölzer) und dgl. fallen[2].

Da vornehmlich die Temperaturerhöhungen $T_E - T_A$, bzw. $T_\infty - T_A$, interessieren, werden wir statt der Mittelpunktstemperaturen die ebenfalls dimensionslosen Größen

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_E(0, 0, \bar{t}) - T_A}{\vartheta - T_A} &= 1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; 0, \bar{t}\right) h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; 0, \bar{t}\right), \\ \text{bzw.} \qquad \frac{T_\infty(0, \bar{t}) - T_A}{\vartheta - T_A} &= 1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; 0, \bar{t}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

bei konstanter Außenraumtemperatur und

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_E(0, 0, \bar{t}) - T_A}{\Theta \frac{\varrho\, c\, r_0^2}{\lambda}} &= \int_0^{\bar{t}} \left[1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; 0, \bar{\tau}\right) h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; 0, \bar{\tau}\right)\right] d\bar{\tau}, \qquad \text{bzw.} \\ \frac{T_\infty(0, \bar{t}) - T_A}{\Theta \frac{\varrho\, c\, r_0^2}{\lambda}} &= \int_0^{\bar{t}} \left[1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; 0, \bar{\tau}\right)\right] d\bar{\tau} \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

bei zeitlich linearer Außenraumaufheizung auftragen.

Dabei haben wir im zweiten Fall wie *Kneschke* $\Phi_0 = T_A$ gesetzt. Wir gehen also von der häufig praktisch erfüllten Voraussetzung aus, daß vor Beginn der Außenraumaufheizung schon völliger Temperaturausgleich des Zylinders mit seiner Umgebung stattgefunden hat. (6.2) erhält man dann durch Integration von (6.1).

[1] *Gröber-Erk-Grigull*, Grundgesetze der Wärmeübertragung, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.
[2] *A. Schack*, Der industrielle Wärmeübergang, Düsseldorf 1929.

Unter $T_E$, bzw. $T_\infty$, (die Argumente lassen wir im folgenden fort) verstehen wir in Zukunft den Temperaturverlauf im Zylindermittelpunkt bzw. auf der Zylinderachse.

b) Die Eigenwerte für verschiedene Kombinationen der Parameter $\lambda/\alpha\, r_0$ und $\varkappa$. Um die Ausdrücke (6.1) und (6.2) numerisch auswerten zu können, müssen zunächst die in den Funktionen $g$ und $h$ auftretenden Eigenwerte $\omega_n$ und $\Omega_m$ für die verschiedenen Parameterkombinationen $\left(\varkappa, \frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\right)$ ermittelt werden.

Da die Entwicklung von $h$ bei großem $\varkappa$ sehr langsam konvergiert (insbesondere bei kleinem $t$) — für $z = 0$ im Grenzfall $\varkappa = \infty$ wie die *Leibniz*sche Reihe —, steht zu erwarten, daß zur Erzielung einer gewissen Genauigkeit mit wachsendem $\varkappa$ immer mehr Reihenglieder und damit Eigenwerte heranzuziehen sind. Andererseits ist $h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; 0, \bar{t}\right)$ eine monoton fallende Funktion von $\bar{t}$, die sich bei kleinem $\bar{t}$ und großem $\varkappa$ nur wenig von 1 unterscheidet, so daß z. B. bei $\varkappa = 8$ im Rahmen unserer Rechengenauigkeit für $\bar{t} \leqq 1{,}8$ keine Funktionswerte $h$ berechnet zu werden brauchen. Nun nimmt mit wachsendem $\bar{t}$ die Zahl der benötigten Reihenglieder schnell ab. Folglich wächst die Anzahl der zu berechnenden Eigenwerte $\Omega_m$ mit wachsendem $\varkappa$ nicht so stark, wie zunächst erwartet werden muß. Da die Eigenwerte $\omega_n$ und $\Omega_m$ auch bei anderen Aufheizprogrammen auftreten und damit von allgemeinerem Interesse sind, stellen wir die in dieser Arbeit benötigten Werte in Tabelle 1 und Tabelle 2 zusammen

Tabelle 1. *Eigenwerte* $\omega_n$

| $\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}$ \ $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 2,17950 | 5,03324 | 7,95688 | 10,93633 |
| 1 | 1,25578 | 4,07948 | 7,15580 | 10,27100 |
| 10 | 0,44168 | 3,85771 | 7,02983 | 10,18329 |

Tabelle 2. *Eigenwerte* $\Omega_m$

| $\varkappa$ \ $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,42887 | 4,30580 | 7,22810 | 10,20025 | | | | | |
| 2 | 0,74806 | 2,24574 | 3,74770 | 5,25583 | 6,77099 | 8,29320 | | | 0,1 |
| 4 | 0,38374 | 1,14948 | 1,91616 | 2,68335 | 3,45121 | 4,21986 | 4,98939 | 5,75984 | |
| 8 | 0,19392 | 0,58178 | 0,96967 | 1,35758 | 1,74554 | 2,13357 | 2,52167 | 2,90985 | |
| 1 | 0,86033 | 3,42562 | 6,43729 | 9,52932 | | | | | |
| 2 | 0,53844 | 1,82180 | 3,28916 | 4,81478 | 6,36115 | 7,91680 | | | 1 |
| 4 | 0,31615 | 0,98379 | 1,70350 | 2,45297 | 3,21694 | 3,98841 | 4,76411 | 5,54241 | |
| 8 | 0,17473 | 0,52829 | 0,89079 | 1,26186 | 1,63927 | 2,02093 | 2,40544 | 2,79189 | |
| 1 | 0,31105 | 3,17309 | 6.29906 | 9,43527 | | | | | |
| 2 | 0,21642 | 1,60197 | 3,15742 | 4,72297 | 6,29113 | 7,86034 | | | 10 |
| 4 | 0,14825 | 0,81589 | 1,58653 | 2,36675 | 3,14953 | 3,93334 | 4,71769 | 5,50233 | |
| 8 | 0,09888 | 0,42180 | 0,80093 | 1,18859 | 1,57870 | 1,96984 | 2,36148 | 2,75343 | |

c) Der Verlauf der Temperaturzunahme im Zylindermittelpunkt bei konstanter Außenraumtemperatur. Aus (6.1) folgen für die Parameterpaare $(\varkappa, \lambda/\alpha\, r_0)$ verschiedene Funktionen von $\bar{t}$, die für kleinere $\bar{t}$ zunächst stark ansteigen und sich dann asymptotisch dem Wert 1 nähern. Aus diesem Grunde berechnen wir die nun zu ermittelnden Funktionswerte anfangs über einem engeren, ab $\bar{t} = 2{,}0$ über einem weiteren Raster. Wir wählen folgende Abszissen $\bar{t}$:

$$0 \quad 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \ldots 1{,}8 \quad 2{,}0 \quad 3{,}0 \quad 4{,}0 \ldots 13{,}0\,.$$

Diesem Bereich $0 \leqq t \leqq 13$ entspricht z. B. bei einer Temperaturleitfähigkeit $\lambda/\varrho\, c = 0{,}003\ \mathrm{cm^2\, sec^{-1}}$, wie sie etwa der Größenordnung nach bei Erden (z. B. gepreßtem $Al_2O_3$-Pulver) vorliegt, und $r_0 = 0{,}5$ cm der Bereich 0 min $\leqq t \leqq$ 18 min.

Die mit Hilfe der in Abschnitt b) angegebenen Eigenwerte an den genannten Stellen berechneten Werte der Funktionen $g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;0,\bar{t}\right)$ und $h\left(\varkappa;\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;0,\bar{t}\right)$ finden sich, soweit sie für die weiteren Untersuchungen benötigt wurden, im Anhang. Aus ihnen ergeben sich nun nach (6.1) die Tabellen 3, 4 und 5. Graphische Darstellungen der hier tabellierten Funktionen finden sich im Anhang.

Tabelle 3. $\frac{T_E - T_A}{\vartheta - T_A}$, *bzw.* $\frac{T_\infty - T_A}{\vartheta - T_A}$, *für* $\frac{\lambda}{\alpha\, r_0} = 0{,}1$

| $\bar{t}$ \ $\varkappa$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,1284 | 0,1000 | 0,1000 | 0,1000 | 0,1000 |
| 0,2 | 5022 | 4010 | 3998 | 3998 | 3998 |
| 0,4 | 8693 | 7747 | 7656 | 7656 | 7656 |
| 0,6 | 9664 | 9195 | 9094 | 9093 | 9093 |
| 0,8 | 9914 | 9718 | 9650 | 9649 | 9649 |
| 1,0 | 9978 | 9902 | 9866 | 9864 | 9864 |
| 1,2 | 9994 | 9966 | 9948 | 9948 | 9948 |
| 1,4 | 9999 | 9988 | 9980 | 9980 | 9980 |
| 1,6 | 1,0000 | 9996 | 9993 | 9992 | 9992 |
| 1,8 | 1,0000 | 9999 | 9997 | 9997 | 9997 |
| 2,0 | | 1,0000 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 3,0 | | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4,0 | | | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

Tabelle 4. $\frac{T_E - T_A}{\vartheta - T_A}$, *bzw.* $\frac{T_\infty - T_A}{\vartheta - T_A}$, *für* $\frac{\lambda}{\alpha\, r_0} = 1$

| $\bar{t}$ \ $\varkappa$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,0299 | 0,0232 | 0,0232 | 0,0232 | 0,0232 |
| 0,2 | 1728 | 1301 | 1298 | 1298 | 1298 |
| 0,4 | 4666 | 3658 | 3580 | 3580 | 3580 |
| 0,6 | 6637 | 5510 | 5314 | 5314 | 5314 |
| 0,8 | 7884 | 6862 | 6584 | 6581 | 6581 |
| 1,0 | 8668 | 7822 | 7513 | 7506 | 7506 |
| 1,2 | 9163 | 8494 | 8193 | 8181 | 8181 |
| 1,4 | 9473 | 8961 | 8689 | 8673 | 8673 |
| 1,6 | 9669 | 9284 | 9051 | 9032 | 9032 |
| 1,8 | 9791 | 9507 | 9314 | 9294 | 9294 |
| 2,0 | 9870 | 9660 | 9505 | 9485 | 9485 |
| 3,0 | 9987 | 9947 | 9905 | 9894 | 9894 |
| 4,0 | 9999 | 9992 | 9982 | 9978 | 9978 |
| 5,0 | 1,0000 | 9999 | 9997 | 9996 | 9995 |
| 6,0 | 1,0000 | 1,0000 | 9999 | 9999 | 9999 |
| 7,0 | . | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 8,0 | . | . | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| | . | . | . | . | . |
| | | . | . | . | . |
| | | | . | . | . |

d) Die Abweichung der Temperaturerhöhung im Mittelpunkt des endlichen Zylinders von der des unendlich langen Zylinders bei konstanter Außenraumtemperatur. Wir sind nun in der Lage, für den Zylindermittelpunkt die relative Abweichung der Übertemperatur $T_E - T_A$ des endlich langen Zylinders $Z_\varkappa$ von der des beidseitig unendlich langen Zylinders $Z_\infty$, also von $T_\infty - T_A$, in Prozenten von $T_\infty - T_A$ für jedes der benutzten $\varkappa$ anzugeben. Wir bilden demnach für $\bar{t} > 0$ die Ausdrücke

$$\frac{(T_E - T_A) - (T_\infty - T_A)}{T_\infty - T_A}\,100$$

und erhalten und Benutzung von (6.1):

$$\frac{(T_E - T_A) - (T_\infty - T_A)}{T_\infty - T_A}\,100 = \left[\frac{1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;0,\bar{t}\right) h\left(\varkappa;\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;0,\bar{t}\right)}{1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;0,\bar{t}\right)} - 1\right] 100\,. \tag{6.3}$$

Tabelle 5. $\frac{T_E - T_A}{\vartheta - T_A}$, *bzw.* $\frac{T_\infty - T_A}{\vartheta - T_A}$, *für* $\frac{\lambda}{\alpha r_0} = 10$

| $\bar{t}$ \ $\varkappa$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,0034 | 0,0026 | 0,0026 | 0,0026 | 0,0026 |
| 0,2 | 0222 | 0164 | 0163 | 0163 | 0163 |
| 0,4 | 0740 | 0539 | 0524 | 0524 | 0524 |
| 0,6 | 1262 | 0938 | 0887 | 0886 | 0886 |
| 0,8 | 1757 | 1338 | 1237 | 1235 | 1235 |
| 1,0 | 2224 | 1730 | 1573 | 1570 | 1570 |
| 1,2 | 2665 | 2111 | 1899 | 1892 | 1892 |
| 1,4 | 3081 | 2479 | 2217 | 2203 | 2203 |
| 1,6 | 3473 | 2831 | 2523 | 2501 | 2501 |
| 1,8 | 3843 | 3168 | 2820 | 2788 | 2788 |
| 2,0 | 4192 | 3489 | 3108 | 3064 | 3064 |
| 3,0 | 5662 | 4887 | 4403 | 4294 | 4293 |
| 4,0 | 6760 | 5986 | 5474 | 5308 | 5305 |
| 5,0 | 7580 | 6849 | 6348 | 6145 | 6137 |
| 6,0 | 8192 | 7525 | 7056 | 6835 | 6821 |
| 7,0 | 8650 | 8057 | 7629 | 7404 | 7384 |
| 8,0 | 8992 | 8474 | 8091 | 7874 | 7848 |
| 9,0 | 9247 | 8803 | 8464 | 8260 | 8230 |
| 10,0 | 9437 | 9060 | 8763 | 8576 | 8543 |
| 11,0 | 9580 | 9262 | 9004 | 8836 | 8801 |
| 12,0 | 9686 | 9420 | 9199 | 9049 | 9014 |
| 13,0 | 9766 | 9545 | 9355 | 9223 | 9189 |

Da die Werte von $g$ und $h$ mit wachsendem $\bar{t}$ kleiner werden, steigt die Anzahl der angebbaren Stellen der Quotienten $\frac{1-g\cdot h}{1-g}$ mit wachsendem $\bar{t}$. Wir erhalten die Abweichungen (über 0,1%) wie sie in Tabelle 6 dargestellt sind.

Tabelle 6. $\frac{(T_E - T_A) - (T_\infty - T_A)}{T_\infty - T_A}\, 100$ [%]

| | $\frac{\lambda}{\alpha r_0} = 0{,}1$ | | | | $\frac{\lambda}{\alpha r_0} = 1$ | | | | $\frac{\lambda}{\alpha r_0} = 10$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{t}$ \ $\varkappa$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 1 | 2 | 4 | 8 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| 0,1 | 28,4 | — | — | — | 29 | — | — | — | 31 | — | — | — |
| 0,2 | 25,6 | 0,30 | — | — | 33,1 | 0,2 | — | — | 36,2 | 0,6 | — | — |
| 0,4 | 13,5 | 1,19 | — | — | 30,3 | 2,2 | — | — | 41,2 | 2,9 | — | — |
| 0,6 | 6,27 | 1,12 | — | — | 24,9 | 3,69 | — | — | 42,4 | 5,9 | 0,1 | — |
| 0,8 | 2,74 | 0,711 | — | — | 19,8 | 4,26 | — | — | 42,3 | 8,3 | 0,16 | — |
| 1,0 | 1,15 | 0,381 | — | — | 15,5 | 4,21 | 0,1 | — | 41,7 | 10,2 | 0,19 | — |
| 1,2 | 0,470 | 0,186 | — | — | 12,0 | 3,83 | 0,15 | — | 40,9 | 11,6 | 0,37 | — |
| 1,4 | 0,189 | — | — | — | 9,22 | 3,32 | 0,18 | — | 39,9 | 12,5 | 0,64 | — |
| 1,6 | — | — | — | — | 7,05 | 2,79 | 0,213 | — | 38,9 | 13,2 | 0,88 | — |
| 1,8 | — | — | — | — | 5,36 | 2,29 | 0,222 | — | 37,8 | 13,6 | 1,15 | — |
| 2,0 | — | — | — | — | 4,06 | 1,85 | 0,217 | — | 36,8 | 13,9 | 1,44 | — |
| 3,0 | — | — | — | — | 0,946 | 0,545 | 0,115 | — | 31,9 | 13,8 | 2,56 | — |
| 4,0 | — | — | — | — | 0,208 | 0,139 | — | — | 27,4 | 12,8 | 3,19 | — |
| 5,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 23,5 | 11,6 | 3,44 | 0,13 |
| 6,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 20,1 | 10,3 | 3,45 | 0,21 |
| 7,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 17,2 | 9,11 | 3,32 | 0,27 |
| 8,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 14,6 | 7,98 | 3,10 | 0,33 |
| 9,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 12,4 | 6,96 | 2,84 | 0,36 |
| 10,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 10,5 | 6,05 | 2,58 | 0,39 |
| 11,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 8,85 | 5,23 | 2,31 | 0,40 |
| 12,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 7,46 | 4,51 | 2,05 | 0,39 |
| 13,0 | — | — | — | — | — | — | — | — | 6,28 | 3,88 | 1,81 | 0,38 |

Die Werte zeigen außer dem zu erwartenden Ergebnis, daß bei wachsendem $\varkappa$ und festem $\alpha$ ($\lambda$ und $r_0$ denken wir uns gegeben) die Abweichungsmaxima fallen, folgende Erscheinungen:

1. Die Beträge der Abweichungsmaxima steigen mit fallender Wärmeübergangszahl bei festem $\varkappa$.

2. Die Stelle des Abweichungsmaximums verschiebt sich mit wachsendem $\varkappa$ bei fester Wärmeübergangszahl in Richtung wachsender $\bar{t}$.

3. Die Stelle des Abweichungsmaximums verschiebt sich mit fallender Wärmeübergangszahl bei festem $\varkappa$ in Richtung wachsender $\bar{t}$.

Je größer also die Wärmeübergangszahl ist, desto kleiner darf bei gegebener zulässiger Abweichung das kleinste $\varkappa$ sein, bei dem der hier behandelte Anwärm- (oder Abkühl-)-Vorgang noch als ebenes Problem durchgerechnet werden kann. Für den Zylindermittelpunkt und den von uns betrachteten Bereich des Parameters $\lambda/\alpha\, r_0$ können diese kleinsten Werte $\varkappa = \varkappa_{\mathrm{Min}}$ aus Tabelle 6 abgeschätzt werden. Läßt man z. B. eine Abweichung von höchstens $1\%$ zu, so dürfen bei kleinem $\alpha$ etwa die Fälle $\varkappa \leqq 6$ nicht mehr mit dem Fall $\varkappa = \infty$ identifiziert werden. Doch darf man wohl sagen, daß die unteren Grenzen für $\varkappa$ tiefer liegen als man gemeinhin annimmt.

Nun interessiert natürlich bei vielen Aufgaben nicht nur die Mittelpunktstemperatur, sondern die Temperaturverteilung im ganzen Zylinder. Hier ist gewiß die Annahme berechtigt, daß für Zylinder mit einem größeren $\varkappa$ als dem hinsichtlich der Mittelpunktstemperatur bestimmten $\varkappa_{\mathrm{Min}}$ nennenswerte Abweichungen von der Lösung des ebenen Problems in solchen und nur in solchen Zylinderpunkten zu befürchten sind, deren Abstand von einer der Deckflächen kleiner ist als $r_0\, \varkappa_{\mathrm{Min}}$.

e) Der Verlauf der Temperaturzunahme im Zylindermittelpunkt und ihre Abweichung von der des unendlich langen Zylinders bei zeitlich linearer Außenraumaufheizung. Die Werte von (6.2) für verschiedene $\bar{t}$ bei verschiedenen Kombinationen $(\varkappa, \lambda/\alpha\, r_0)$ können nun aus den Werten der Tabelle 3 bis 5 leicht durch numerische Integration berechnet werden. Mit diesen Werten können anschließend für $\bar{t} > 0$ die uns wesentlich interessierenden relativen Abweichungen

$$\frac{(T_E - T_A) - (T_\infty - T_A)}{T_\infty - T_A}\, 100 = \left[\frac{\int_0^{\bar{t}} (1 - g \cdot h)\, d\bar{\tau}}{\int_0^{\bar{t}} (1 - g)\, d\bar{\tau}} - 1\right] 100\ [\%] \tag{6.4}$$

ermittelt werden. Wendet man jedoch auf (6.4) den erweiterten Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so erhält man

$$\frac{(T_E - T_A) - (T_\infty - T_A)}{T_\infty - T_A}\, 100 = \left[\frac{1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;\, 0, \bar{\xi}\right) \cdot h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;\, 0, \bar{\xi}\right)}{1 - g\left(\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}\,;\, 0, \bar{\xi}\right)} - 1\right] 100\ [\%] \tag{6.4a}$$

mit $0 < \bar{\xi} = \bar{\xi}(\bar{t}) < \bar{t}$ und erkennt daraus sofort, daß die Maximalwerte von (6.4) nicht größer sind als die entsprechenden maximalen Abweichungen in dem zuvor behandelten Fall konstanter Außenraumtemperatur (diese Feststellung kann natürlich ebenso für jeden anderen Punkt des Zylinders bewiesen werden). Wir wollen deshalb darauf verzichten, für alle bisher benutzten Werte von $\lambda/\alpha\, r_0$ die Temperaturkurven hier wiederzugeben. Wir rechnen lediglich noch den Fall $\lambda/\alpha\, r_0 = 1$ für $r = z = 0$ mittels bekannter Quadraturformeln durch. An diesem Beispiel können wir den Einfluß von $\varkappa$ untersuchen und werden sehen, daß bei gegebenem $\varkappa$ der Maximalwert von (6.4) die Größenordnung des Maximalwertes von (6.3) auch wirklich erreichen kann.

Bei diesen Betrachtungen bestimmen wir

$$\int_0^{0,2} (1 - g\, h)\, d\bar{\tau}$$

unter Benutzung der früher berechneten Werte von $1 - g\, h$ bei 0; 0,1; 0,2 mittels der Kepler-Regel. Die Formel

$$\int_{x_1}^{x_2} y\, dx = \frac{k}{24}(-y_0 + 13\, y_1 + 13\, y_2 - y_3) \quad (k = \text{Intervallbreite}) \tag{6.5}$$

wurde angewandt zur Berechnung der Integrale

$$\int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+1=\bar{t}_i+0,2} (1-g\,h)\,d\bar{\tau} \qquad (0,2 \leqq \bar{t}_i \leqq 1,8)\,.$$

$\int_{1,8}^{2,0} (1-g\,h)\,d\,\bar{\tau}$ wurde mittels

$$\int_{x_2}^{x_3} y\,dx = \frac{k}{24}(y_0 - 5\,y_1 + 19\,y_2 + 9\,y_1) \tag{6.6}$$

bestimmt. Im Bereich $\bar{t} \geqq 2,0$ sind im Falle $\lambda/\alpha\,r_0 = 1$ die Funktionen $1-g\,h$ bereits nahezu linear, so daß im Rahmen der erstrebten Genauigkeit von der Schrittweite $k = 0,2$ bedenkenlos zu $k = 1$ übergegangen werden kann. Am Anfang des Bereichs $\bar{t} \geqq 2$ wurde die zu (6.6) symmetrische Formel benutzt, anschließend wieder (6.5). Damit ergaben sich die Werte von Tabelle 7.

Tabelle 7. $\dfrac{T_E - T_A}{\Theta\,\dfrac{\varrho\,c\,r_0^2}{\lambda}}$, *bzw.* $\dfrac{T_\infty - T_A}{\Theta\,\dfrac{\varrho\,c\,r_0^2}{\lambda}}$ *bei zeitlich linearer Außenraumaufheizung für* $\dfrac{\lambda}{\alpha\,r_0} = 1$

| $\bar{t}$ \ $\varkappa$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,2 | 0,00975 | 0,00743 | 0,00742 | 0,00742 | 0,00742 |
| 0,4 | 07349 | 05656 | 05584 | 05584 | 05584 |
| 0,6 | 1879 | 1491 | 1456 | 1456 | 1456 |
| 0,8 | 3341 | 2736 | 2653 | 2652 | 2652 |
| 1,0 | 5002 | 4210 | 4068 | 4066 | 4066 |
| 1,2 | 6789 | 5846 | 5642 | 5638 | 5638 |
| 1,4 | 8655 | 7594 | 7333 | 7326 | 7326 |
| 1,6 | 1,057 | 9420 | 9109 | 9098 | 9098 |
| 1,8 | 1,252 | 1,130 | 1,095 | 1,093 | 1,093 |
| 2,0 | 1,448 | 1,322 | 1,283 | 1,281 | 1,281 |
| 3,0 | 2,443 | 2,305 | 2,257 | 2,254 | 2,254 |
| 4,0 | 3,442 | 3,303 | 3,253 | 3,249 | 3,249 |
| 5,0 | 4,442 | 4,303 | 4,252 | 4,248 | 4,248 |
| 6,0 | 5,442 | 5,303 | 5,252 | 5,248 | 5,248 |
| 7,0 | 6,... | 6,... | 6,... | 6,... | 6,... |
| | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . |
| | . | . | . | . | . |

Graphische Darstellungen der hier tabellierten Funktionen finden sich im Anhang.

Wie bereits früher erwähnt, ist nach einiger Zeit die Differenz zwischen Außenraumtemperatur und Mittelpunktstemperatur und damit auch

$$\bar{t} - \frac{T_E - T_A}{\Theta\,\dfrac{\varrho\,c\,r_0^2}{\lambda}}, \quad \text{bzw.} \quad \bar{t} - \frac{T_\infty - T_A}{\Theta\,\dfrac{\varrho\,c\,r_0^2}{\lambda}},$$

praktisch konstant. Für den beidseitig unendlich langen Zylinder kann diese Konstante aus (5.4b) berechnet werden. Sie ergibt sich bei $\lambda/\alpha\,r_0 = 1$, $r = 0$, $\Phi_0 = T_A$ zu $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = 0,750$.

Tabelle 7 liefert hierfür den Wert 0,752. Auf Grund dieser Übereinstimmung dürfen wir annehmen, daß der durch die näherungsweise Integration bedingte Fehler höchstens die letzte Stelle unserer Funktionswerte geringfügig verfälschte.

Mittels Tabelle 7 bilden wir nun für $\bar{t} > 0$ die in Tabelle 8 angegebene relative Abweichung der Temperaturerhöhung im Mittelpunkt des endlich langen Zylinders von der auf der Achse des beidseitig unendlich langen Zylinders bei zeitlich linearer Außenraumaufheizung.

Tabelle 8. $\dfrac{(T_E - T_A) - (T_\infty - T_A)}{T_\infty - T_A}\, 100\ [\%]$ *für* $\dfrac{\lambda}{\alpha\, r_0} = 1$

| $\bar{t}$ \ $\varkappa$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 31,4 | 0,1 | — | — |
| 0,4 | 31,6 | 1,3 | — | — |
| 0,6 | 29,1 | 2,40 | — | — |
| 0,8 | 26,0 | 3,17 | — | — |
| 1,0 | 23,0 | 3,54 | — | — |
| 1,2 | 20,4 | 3,69 | — | — |
| 1,4 | 18,1 | 3,66 | 0,1 | — |
| 1,6 | 16,2 | 3,54 | 0,12 | — |
| 1,8 | 14,5 | 3,39 | 0,18 | — |
| 2,0 | 13,0 | 3,20 | 0,156 | — |
| 3,0 | 8,39 | 2,26 | 0,133 | — |
| 4,0 | 5,94 | 1,66 | 0,123 | — |
| 5,0 | 4,57 | 1,29 | — | — |
| 6,0 | 3,70 | 1,05 | — | — |
| 7,0 | 3,10 | 0,880 | — | — |
| 8,0 | 2,68 | 0,759 | — | — |
| 9,0 | 2,35 | 0,667 | — | — |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |

Tabelle 8 enthält wiederum nur Abweichungen über 0,1%.

Der Vergleich von Tabelle 8 mit Tabelle 6 lehrt, daß hier wie dort die relativen Abweichungen der Übertemperatur $T_E - T_A$ von $T_\infty - T_A$ mit wachsendem $\bar{t}$ ($\bar{t} > 0$) zunächst ansteigen, um dann nach Erreichen eines Maximalwertes abzufallen. Dabei ist der Anstieg steiler als der Abfall. Dieser Vorgang ist jedoch bei unserem linearen Aufheizprogeramm weiter auseinandergezogen als bei konstanter Außenraumtemperatur. Die Maximalwerte der Abweichungen bei linearer Aufheizung sind von gleicher Größenordnung wie die bei konstanter Außentemperatur. Diese Erscheinungen lassen sich ebenso bei $\lambda/\alpha\, r_0 = 0{,}1$ und $\lambda/\alpha\, r_0 \doteq 10$ nachweisen.

Somit bleiben im wesentlichen alle früheren Betrachtungen hinsichtlich der Möglichkeit, den Zylinder endlicher Länge bei konstanter Außenraumtemperatur als beidseitig unendlich lang behandeln zu können, auch für den Fall der zeitlich linearen Außenraumaufheizung mit $\Phi_0 = T_A$ bestehen. Auch der Einfluß der Wärmeübergangszahl bleibt qualitativ erhalten.

f) Aussagekraft der gewonnenen Ergebnisse für andere Aufheizprogramme $\Phi(t)$. Die Aussagekraft unserer unter speziellen Annahmen für die Fälle $\Phi(t) = \vartheta =$ konst und $\Phi(t) = \Theta\, t + T_A$ erzielten Ergebnisse hinsichtlich anderer nur zeitabhängiger Aufheizprogramme $\Phi(t)$ ist natürlich gering. Allerdings werden auch bei diesen Programmen die Abweichungen letztlich durch die Größe der Differenzen $1 - h\left(\varkappa; \frac{\lambda}{\alpha\, r_0}; \frac{z}{r_0}, \bar{t}\right)$ bestimmt, und der Einfluß der Wärmeübergangszahl dürfte der Tendenz nach ebenfalls erhalten bleiben. Bei der Frage, ob ein Zylinder endlicher Länge durch den beidseitig unendlich langen Zylinder ersetzt werden darf, bleibt daher Vorsicht zumindest bei den Parameterkombinationen $(\varkappa, \lambda/\alpha\, r_0)$ geboten, bei denen auch die in dieser Arbeit untersuchten Fälle starke Abweichungen von den Lösungen der entsprechenden ebenen Probleme zeigten.

g) Vergleich des Falles $\varkappa = 1$ mit dem der Kugel. Gelegentlich (z. B. bei differentialthermoanalytischen Untersuchungen[1]) interessiert der Vergleich des Zylinders $Z_1$ mit der diesem Zylinder einbeschriebenen Kugel.

Die Lösung von (3.1) für die Kugel lautet im Falle konstanter Außenraumtemperatur $\vartheta$ bei im Innern der Kugel überall gleicher Anfangstemperatur $T_A$

$$\frac{T - T_A}{\vartheta - T_A} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \overline{\omega}_n}{\frac{\lambda}{\alpha\, r_0}(\overline{\omega}_n - \sin \overline{\omega}_n \cos \overline{\omega}_n)}\, \frac{\sin\left(\overline{\omega}_n \frac{r}{r_0}\right)}{\overline{\omega}_n \frac{r}{r_0}}\, e^{-\overline{\omega}_n^2 \frac{\lambda}{\varrho\, c\, r_0^2} t},$$

[1] *Lehmann-Haßler*, TIZ-Zbl. 82 (1958), 445.

für den Mittelpunkt ($r = 0$) also

$$\frac{T - T_A}{\vartheta - T_A} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \overline{\omega}}{\frac{\lambda}{\alpha r_0}(\overline{\omega}_n - \sin \overline{\omega}_n \cos \overline{\omega}_n)} e^{-\overline{\omega}_n^2 \frac{\lambda}{\varrho c r_n^2} t} . \tag{6.7}$$

Dabei sind die Eigenwerte $\overline{\omega}_n$ die positiven Lösungen der Gleichung

$$\overline{\omega} \operatorname{ctg} \overline{\omega} = 1 - \frac{\alpha r_0}{\lambda} . \tag{6.8}$$

Es genügt, (6.7) mit dem Fall $\varkappa = 1$ der entsprechneden Formel (6.1) für nur einen Wert des Parameters $\lambda/\alpha\, r_0$ zu vergleichen. Wir wählen der Einfachheit halber $\lambda/\alpha\, r_0 = 1$, so daß die Lösungen von (6.8) lauten

$$\overline{\omega}_n = \frac{2n - 1}{2} \pi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(die Lösungen für andere Werte von $\lambda/\alpha\, r_0$ finden sich bei Gröber-Erk-Grigull *). Damit folgt

$$\frac{T - T_A}{\vartheta - T_A} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \bar{t}} \tag{6.7a}$$

(für $\bar{t} = 0$ erhält man mit der *Leibniz*schen Reihe natürlich $T = T_A$).

Über unserem schon früher benutzten $\bar{t}$-Raster ergibt (6.7 a) die Werte von Tabelle 9. Eine graphische Darstellung dieser Funktion ist im Anhang beigefügt.

Tabelle 9. $\frac{T - T_A}{\vartheta - T_A}$ *für die Kugel,* $\frac{\lambda}{\alpha r_0} = 1$

| $\bar{t}$ | | $\bar{t}$ | |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 1,6 | 0,9754 |
| 0,1 | 0,05071 | 1,8 | 9850 |
| 0,2 | 2277 | 2,0 | 9909 |
| 0,4 | 5255 | | |
| 0,6 | 7103 | 3,0 | 9992 |
| 0,8 | 8231 | 4,0 | 1,0000 |
| 1,0 | 8920 | 5,0 | 1,0000 |
| 1,2 | 9341 | | . |
| 1,4 | 9598 | | . |
| | | | . |

Mit den entsprechenden Werten der Tabellen 3 bis 5 bilden wir nun die relativen Abweichungen der Temperaturerhöhung der Kugel von der des Zylinders $Z_1$, also die Werte von

$$\frac{(T_{\text{Kugel}} - T_A) - (T_{Z_1} - T_A)}{T_{Z_1} - T_A} \, 100 \, [\%]$$

(aufgetragen wurden nur Werte über 0,1%) in Tabelle 10. Die Werte zeigen, daß sich der Zylinder $Z_1$ bezüglich der Erwärmung zunächst viel träger verhält als die Kugel von gleichem Radius. Die Abweichungen fallen jedoch bedeutend schneller als z. B. die Abweichungen der Mittelpunktstemperatur in $Z_1$ von der in $Z_2$.

---

* Siehe Fußnote 1 von Seite 30.

Tabelle 10. $\dfrac{(T_{\text{Kugel}} - T_A) - (T_{Z_1} - T_A)}{T_{Z_1} - T_A}\, 100$ [%] *für* $\dfrac{\lambda}{\alpha r_0}$

| $\bar{t}$ | | $\bar{t}$ | |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 91 | 1,6 | 0,879 |
| 0,2 | 31,8 | 1,8 | 0,603 |
| 0,4 | 12,6 | 2,0 | 0,395 |
| 0,6 | 7,02 | | |
| 0,8 | 4,40 | 3,0 | — |
| 1,0 | 2,91 | 4,0 | — |
| 1,2 | 1,94 | | . |
| 1,4 | 1,31 | | . |

## 7. Anhang: Tabellen und graphische Darstellungen.

Tabelle A 1. $g\left(\dfrac{\lambda}{\alpha r_0}; 0\, \bar{t}\right)$

| $\bar{t}$ \ $\frac{\lambda}{\alpha r_0}$ | 0,1 | 1 | 10 | $\bar{t}$ \ $\frac{\lambda}{\alpha r_0}$ | 0,1 | 1 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 3,0 | 000001 | 01065 | 5707 |
| 0,1 | 0,9000 | 0,9768 | 0,9974 | 4,0 | | 002199 | 4695 |
| 0,2 | 6002 | 8702 | 9837 | 5,0 | | 000454 | 3863 |
| 0,4 | 2344 | 6420 | 9476 | 6,0 | | 000094 | 3179 |
| 0,6 | 09067 | 4686 | 9114 | 7,0 | | 000019 | 2616 |
| 0,8 | 03506 | 3419 | 8765 | 8,0 | | 000004 | 2152 |
| 1,0 | 01356 | 2494 | 8430 | 9,0 | | | 1770 |
| 1,2 | 005244 | 1819 | 8108 | 10,0 | | | 1457 |
| 1,4 | 002028 | 1327 | 7797 | 11,0 | | | 1199 |
| 1,6 | 000784 | 09682 | 7499 | 12,0 | | | 09862 |
| 1,8 | 000303 | 07063 | 7211 | 13,0 | | | 08113 |
| 2,0 | 000117 | 05152 | 6936 | | | | |

Tabelle A 2. $h\left(\varkappa; \dfrac{\lambda}{\alpha r_0}, 0, \bar{t}\right)$

| $\frac{\lambda}{\alpha r_0}$ | 0,1 | | | | 1 | | | | 10 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{t}$ \ $\varkappa$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 1 | 2 | 4 | 8 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| 0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,1 | 0,9684 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9931 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9992 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,2 | 8293 | 0,9980 | 1,0000 | 1,0000 | 9506 | 0,9996 | 1,0000 | 1,0000 | 9940 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,4 | 5574 | 9610 | 0,9999 | 1,0000 | 8309 | 9879 | 1,0000 | 1,0000 | 9772 | 9984 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,6 | 3707 | 8877 | 9994 | 1,0000 | 7177 | 9581 | 0,9999 | 1,0000 | 9587 | 9943 | 0,9999 | 1,0000 |
| 0,8 | 2464 | 8043 | 9972 | 1,0000 | 6190 | 9179 | 9992 | 1,0000 | 9404 | 9883 | 9998 | 1,0000 |
| 1,0 | 1638 | 7230 | 9919 | 1,0000 | 5339 | 8733 | 9972 | 1,0000 | 9224 | 9810 | 9996 | 1,0000 |
| 1,2 | 1089 | 6479 | 9830 | 1,0000 | 4604 | 8278 | 9935 | 1,0000 | 9047 | 9730 | 9991 | 1,0000 |
| 1,4 | 07239 | 5798 | 9705 | 1,0000 | 3971 | 7831 | 9877 | 1,0000 | 8874 | 9646 | 9982 | 1,0000 |
| 1,6 | 04812 | 5186 | 9551 | 1,0000 | 3424 | 7399 | 9802 | 1,0000 | 8704 | 9560 | 9970 | 1,0000 |
| 1,8 | 03199 | 4638 | 9374 | 1,0000 | 2953 | 6987 | 9709 | 1,0000 | 8537 | 9473 | 9955 | 1,0000 |
| 2,0 | 02126 | 4147 | 9180 | 0,9999 | 2547 | 6596 | 9601 | 1,0000 | 8373 | 9387 | 9936 | 1,0000 |
| 3,0 | 00276 | 2370 | 8100 | 9981 | 1215 | 4938 | 8928 | 0,9991 | 7601 | 8959 | 9807 | 0,9999 |
| 4,0 | . | . | . | . | 05795 | 3695 | 8171 | 9957 | 6900 | 8549 | 9639 | 9993 |
| 5,0 | . | . | . | . | 02764 | 2766 | 7429 | 9883 | 6264 | 8158 | 9453 | 9979 |
| 6,0 | . | . | . | . | 01318 | 2070 | 6736 | 9768 | 5686 | 7785 | 9260 | 9956 |
| 7,0 | . | . | . | . | 00629 | 1549 | 6100 | 9618 | 5162 | 7428 | 9064 | 9923 |
| 8,0 | . | . | . | . | 00300 | 1159 | 5522 | 9441 | 4686 | 7089 | 8870 | 9881 |
| 9,0 | . | . | . | . | . | . | . | . | 4254 | 6764 | 8679 | 9831 |
| 10,0 | . | . | . | . | . | . | . | . | 3862 | 6455 | 8491 | 9774 |
| 11,0 | . | . | . | . | . | . | . | . | 3505 | 6159 | 8307 | 9712 |
| 12,0 | . | . | . | . | . | . | . | . | 3182 | 5878 | 8127 | 9645 |
| 13,0 | . | . | . | . | . | . | . | . | 2889 | 5609 | 7950 | 9574 |

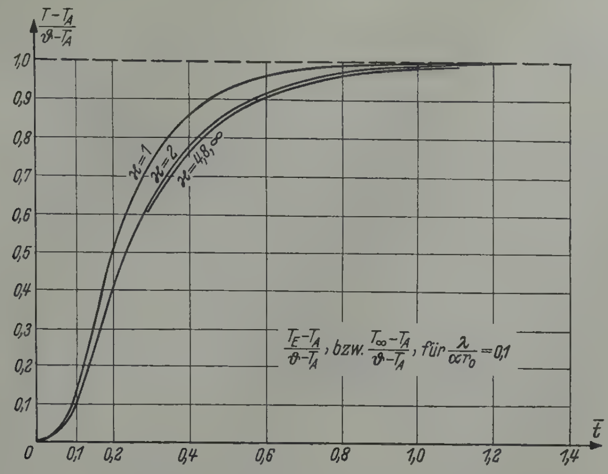


Abb. 1. Konstante Außenraumtemperatur.

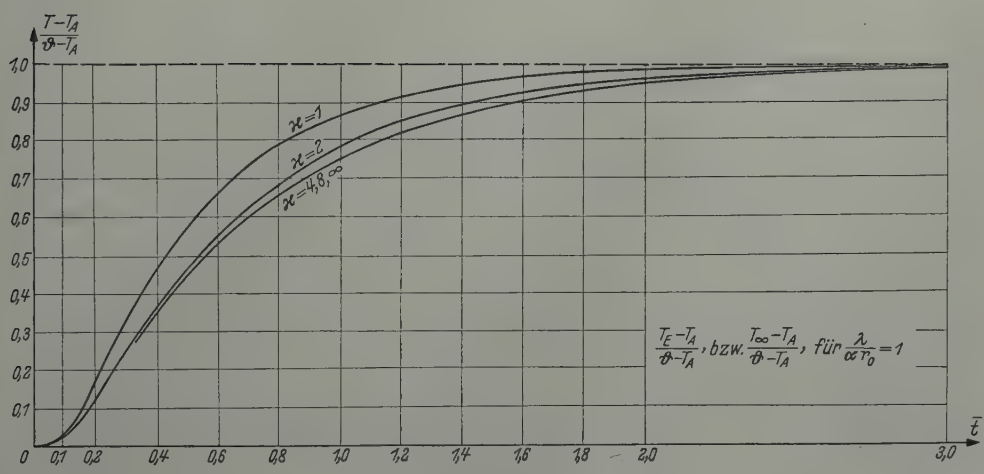


Abb. 2. Konstante Außenraumtemperatur.

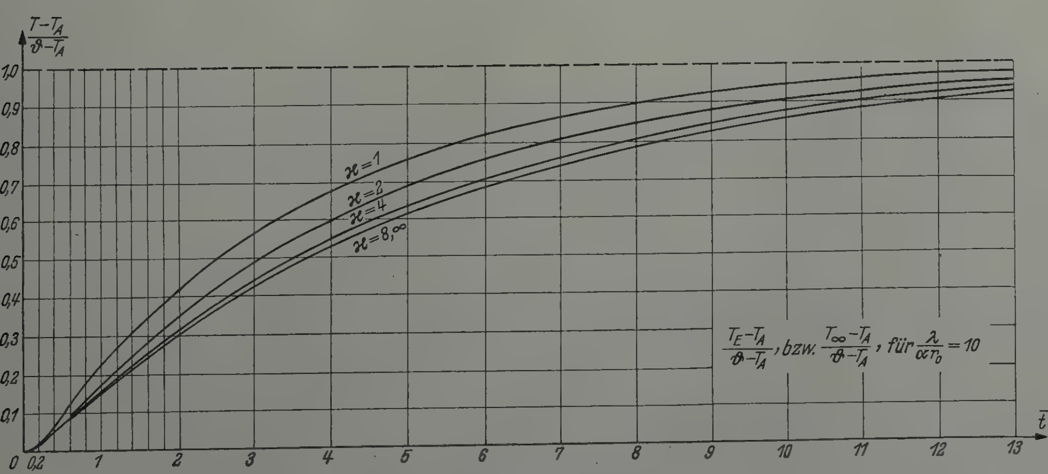


Abb. 3. Konstante Außenraumtemperatur.

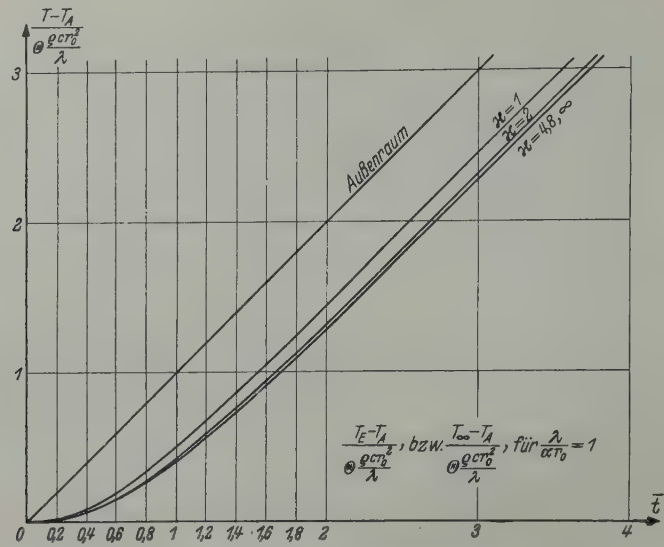


Abb. 4. Zeitlich lineare Außenraumtemperatur.

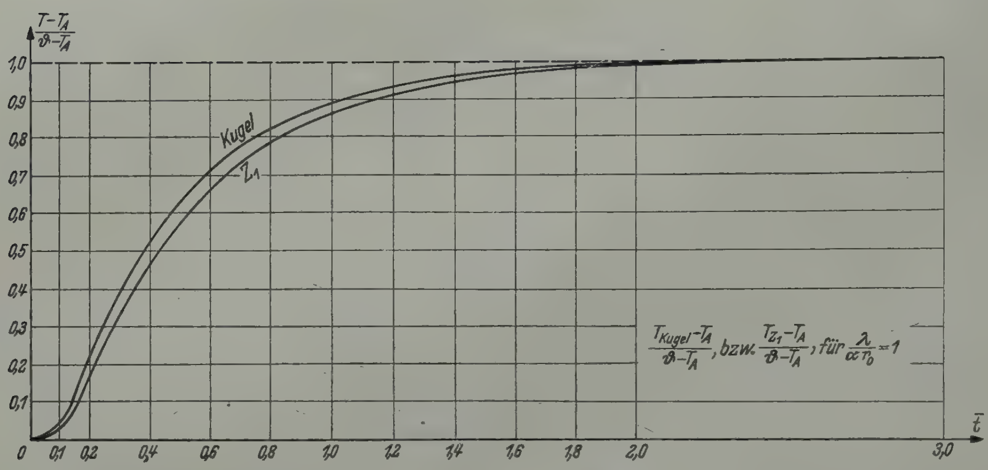


Abb. 5. Konstante Außenraumtemperatur.

**8. Zusammenfassung.** Ziel der Arbeit war die Untersuchung des Einflusses der endlichen Zylinderlänge und der Wärmeübergangszahl auf die Temperaturverteilung in Vollzylindern bei gesteuerten Anheizvorgängen. Fragen dieser Art kommen z. B. in der Meßtechnik (Einfluß der Gestalt eines Thermometerkörpers auf die Temperaturmessung, Untersuchungen von Erden und dgl. mittels Differentialthermoanalyse) und in der Reaktortechnik vor.

Von der Temperatur des den Zylinder umgebenden Mediums wird angenommen, daß sie nur von der Zeit $t$ abgängt. Die Zylinderanfangstemperatur habe in allen Punkten den gleichen Wert. Für die Mittelebene des Zylinders wird gezeigt, daß die Lösung des dreidimensionalen Problems bei wachsender Zylinderlänge gleichmäßig in $t$ gegen die Lösung des ebenen Problems konvergiert.

In den Fällen konstanter Umgebungstemperatur und zeitlich linearer Außenraumaufheizung werden für verschiedene Kombinationen der Parameter $\lambda/\alpha\, r_0$ und $\varkappa$ die Temperaturkurven für den Zylindermittelpunkt erstellt und die relativen Abweichungen dieser Temperaturkurven der Zylinder endlicher Länge von denen des beidseitig unendlich langen Zylinders errechnet.

Aus den Temperaturkurven für verschiedene $\lambda/\alpha\, r_0$ bei festem $\varkappa$ ist der Einfluß der Wärmeübergangszahl erkennbar, aus den Tabellen der Abweichungen die kleinsten Werte von $\varkappa$, für die bei gegebener zulässiger Abweichung und gegebenem $\lambda/\alpha\, r_0$ die Aufgabe als ebenes Problem behandelt werden darf.

Für den Fall $\varkappa = 1$ bei konstanter Außenraumtemperatur wird gezeigt, daß sich die dem Zylinder einbeschriebene Kugel bezüglich der Erwärmung zunächst viel weniger träge verhält als der Zylinder, daß jedoch alsbald die Abweichungen gering werden.

(Eingegangen am 1. Februar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *R. Ansorge*, Institut für Mathematik und Mechanik der Bergakademie Clausthal, Clausthal-Zellerfeld.

# Die Knickung der tordierten Welle mit Einzelkraft und kontinuierlichen Längskraft*

Von **H. Leipholz**

**1. Einleitung.** Das Auftreten einer kontinuierlichen Längskraft scheint, so weit es mir bekannt ist, für die tordierte und gedrückte Welle noch nicht berücksichtigt worden zu sein. Mit diesem neuen Problem soll sich daher die vorliegende Arbeit befassen.

Bei den hier betrachteten Stäben soll es sich um „lange, dünne" Stäbe handeln. Jeder Stabquerschnitt habe zwei gleiche Hauptträgheitsmomente, die zudem über die Länge des Stabes konstant seien.

Belastet sei der Stab durch kontinuierliche, über seine Achse nach einem vorgeschriebenen Gesetz verteilte, richtungstreue Druckkräfte $q$, durch eine ebenfalls richtungstreue Einzelkraft $P$ und durch ein axiales Torsionsmoment $T$, welche an den Stabenden angreifen.

Ferner wird verlangt, daß die Torsion konservativ sein soll. Damit ist dann das ganze Problem konservativ; denn bei den richtungstreuen Druckkräften handelt es sich von vornherein um konservative Kräfte. Ist das Problem aber konservativ, so kann man zur Ableitung der Differentialgleichungen die statischen Gleichgewichtsbedingungen anwenden. Dies wurde bereits von *H. Ziegler*[1] gezeigt.

Soll das an den Stabenden angreifende axiale Torsionsmoment konservativ sein, so muß man, wie *H. Ziegler* gezeigt hat, als Stablagerungsfälle die in Abb. 1 gezeigten verlangen, was im folgenden berücksichtigt wird.

**2. Die Grundgleichungen.** Wendet man auf ein herausgeschnittenes Stabelement die Gleichgewichtsbedingungen der Statik an, so erhält man durch die Forderung nach dem Gleichgewicht der Kräfte

$$\frac{d\mathfrak{K}}{ds} = -\mathfrak{k} \tag{1}$$

und durch die Forderung nach dem Gleichgewicht aller Momente

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} + (\mathfrak{t} \times \mathfrak{K}) = 0\,. \tag{2}$$

In diesen Grundgleichungen (1) und (2) bedeutet $\mathfrak{M}$ die Resultierende der inneren Momente, $\mathfrak{K}$ die Resultierende der inneren Kräfte in einem Querschnitt des Stabes, ferner $\mathfrak{k}$ die äußere Kraft und $\mathfrak{t}$ den Tangenteneinheitsvektor für den Punkt der Stabachse, durch den der betrachtete Querschnitt geht.

**3. Das Hauptachsensystem und seine Anwendung auf die Grundgleichungen.** Als Achsensystem soll insbesondere das orthogonale Hauptachsensystem $(\xi, \eta, \zeta)$ eingeführt werden. Die $\zeta$-Achse zeigt in Richtung der Stabachsen-Tangente im Sinne wachsender Bogenlänge. Die $\xi$- und $\eta$-Achsen liegen in einer zur Stabachse senkrechten Ebene, die auch Ebene der Stabquerschnitte ist, und sie sollen mit den Schwerpunktshauptachsen der jeweiligen Stabquerschnitte zusammenfallen.

Die Komponenten der in (1) und (2) auftretenden Vektoren seien im Hauptachsensystem

$$\mathfrak{K} = (Q_\xi, Q_\eta, N_\zeta)\,, \qquad \mathfrak{M} = (M_\xi, M_\eta, T)\,,$$
$$\mathfrak{k} = (k_\xi, \mathfrak{k}_\eta, q)\,, \qquad \mathfrak{t} = (0, 0, 1)\,.$$

Ferner ist noch zu beachten, daß das Hauptachsensystem beweglich gedacht ist: es gleite mit der Geschwindigkeit Eins an der Stabachse entlang und drehe sich dabei mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$.

Im Hauptachsensystem nimmt (1) und (2) die Form

$$\frac{d'\mathfrak{K}}{ds} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{K} + \mathfrak{k} = 0\,, \tag{3}$$

$$\frac{d'\mathfrak{M}}{ds} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{M} + \mathfrak{t} + \mathfrak{K} = 0 \tag{4}$$

* Auszug aus einer von der Technischen Hochschule Stuttgart genehmigten Dissertation (1959).

[1] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 2 (1951), S. 265; 3, (1952) S. 96; Ing.-Arch. 20, S. 49 (1952).

an, wobei das Symbol $d'/ds$ die Ableitung einer Größe im bewegten Hauptachsensystem bedeutet und $\mathfrak{w} = (\omega_\xi, \omega_\eta, \tau_\zeta)$ ist.

Schreibt man (3) und (4) in Komponenten, so erhält man die „erweiterten" Gleichungen von *Kirchhoff* und *Clebsch*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ_\xi}{ds} + N_\zeta\,\omega_\eta - Q_\eta\,\tau + k_\xi = 0\,, && \frac{dM_\xi}{ds} + T\,\omega_\eta - M_\eta\,\tau - Q_\eta = 0\,,\\ &\frac{dQ_\eta}{ds} + Q_\xi\,\tau - N_\zeta\,\omega_\xi + k_\eta = 0\,, && \frac{dM_\eta}{ds} + M_\xi\,\tau - T\,\omega_\xi + Q_\xi = 0\,,\\ &\frac{dN_\eta}{ds} + Q_\eta\,\omega_\xi - Q_\xi\,\omega_\eta + q = 0\,, && \frac{dT}{ds} + M_\eta\,\omega_\xi - M_\xi\,\omega_\eta = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

**4. Zusammenhang zwischen den Größen der Stabverformung und den inneren Momenten.** Wie bekannt, besteht zwischen den Komponenten des Vektors $\mathfrak{w}$ (Drehgeschwindigkeit des Hauptachsensystems) und den Komponenten des Vektors der elastischen Verformung ein derartiger Zusammenhang, daß $\omega_\xi$, $\omega_\eta$ den Stabkrümmungen und $\tau_\zeta$ der Verdrillung entspricht. Außerdem ist bekannt[1], daß zwischen den Komponenten des Verformungsvektors und den Komponenten des Stabmomentes die Beziehungen bestehen

$$M_\xi = a\,\omega_\xi\,, \qquad M_\eta = a\,\omega_\eta\,, \qquad T = c\,\tau_\zeta\,. \tag{6}$$

Dabei sind $a$ die konstanten Biegesteifigkeiten und $c$ die konstante Torsionssteifigkeit des Stabes[2].

Die sechs Gleichungen (5) und die drei Gleichungen (6) sind zur Bestimmung der neun Unbekannten dieser Gleichungen (Komponenten von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{w}$) ausreichend.

**5. Der Zusammenhang zwischen dem Hauptachsensystem und einem raumfesten Koordinatensystem.** Es ist zweckmäßig, eine Beziehung zwischen dem Hauptachsensystem und einem raumfesten (absoluten) Koordinatensystem herzustellen. Die elastischen Konstanten und die inneren Kräfte des Stabes lassen sich im Hauptachsensystem wohl leicht darstellen. Dies wird aber häufig für die Randbedingungen und die äußeren Lasten nicht gelten. Diese werden meist bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems gegeben sein, so daß man sie auf das Hauptachsensystem umrechnen muß.

Sieht man von der belanglosen gleichförmigen Translation ab, so kann man das Hauptachsensystem als ein um einen festen Punkt kreiselndes Dreibein ansehen. Die Drehgeschwindigkeit dieser Kreiselung ist durch den Vektor $\mathfrak{w}$ ausgedrückt. In dem festen Punkt möge auch der Ursprung des raumfesten Systems liegen. Die Herstellung einer Beziehung zwischen dem körperfesten (Hauptachsen-) und dem raumfesten System ist mit Hilfe der *Euler*schen Winkel möglich. Für den Übergang vom raumfesten Koordinatensystem zum Hauptachsensystem hat man die Transformationsmatrix

$$\mathfrak{A}_1 \equiv \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta & \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta\\ -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\psi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Die Beziehung zwischen den Komponenten des Drehvektors $\mathfrak{w}$ und den *Euler*schen Winkeln wird gegeben durch

$$\omega_\xi = \cos\varphi\,\dot\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\,\dot\psi\,, \qquad \omega_\eta = -\sin\varphi\,\dot\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\,\dot\psi\,, \qquad \tau_\zeta = \cos\vartheta\,\dot\psi + \dot\varphi\,. \tag{8}$$

Die zum ersten Eigenwert des Problems gehörende Gleichgewichtslage des Stabes wird nur wenig von der Ruhelage des unverformten Stabes verschieden sein. Daher wird $\vartheta$ ein sehr kleiner Winkel sein, so daß man linearisieren und $\cos\vartheta = 1$ setzen kann. Somit ergibt sich aus der dritten Gleichung (8) der neue Winkel

$$\tau_\zeta = \dot\varphi + \dot\psi\,,$$

also

$$\varphi + \psi = \chi = \int_0^s \tau_\zeta\,ds\,. \tag{9}$$

---

[1] *A. E. H. Love*, A treatise on the mathematical theory of elasticity, S. 388. Cambridge 1952.

[2] Zur Verwendung des Hauptachsensystems bei kreisrundem Querschnitt ist zu bemerken: Man markiere vor der Verformung des Stabes ein $(\xi, \eta, \zeta)$-Kreuz mit einem beliebigen orthogonalen $(\xi, \eta)$-Achsenpaar, da hier ja ein jedes $(\xi, \eta)$-Paar Hauptachsenpaar ist; dann verfolge man es in Gedanken während der Verformung, so daß man es nach der Verformung wiederfindet. Das auf diese Weise ausgezeichnete Achsensystem macht, wie es vom Hauptachsensystem verlangt wird, Krümmung und Verdrillung des Stabes mit.

Beachtet man die Kleinheit des Winkels $\vartheta$ und verwendet man (9), so wird aus (7)

$$\mathfrak{A}_2 \equiv \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi & e_\xi \\ -\sin\chi & \cos\chi & e_\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Dabei hat man noch die Tatsache berücksichtigt, daß für einen lotrechten Einheitsvektor $\mathfrak{e}$, der im absoluten System die Komponenten (0, 0, 1) und im Hauptachsensystem die Komponenten $(e_\xi, e_\eta, e_\zeta)$ hat, gilt

$$e_\xi = \sin\varphi \sin\vartheta, \qquad e_\eta = \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad e_\zeta = \cos\vartheta \approx 1, \tag{11}$$

was man erkennt, wenn man auf $\mathfrak{e}$ die Transformationsmatrix (7) anwendet.

Künftig kann die Umrechnung der Komponentendarstellung von Vektoren aus dem absoluten Koordinatensystem in das Hauptachsensystem nach

$$\mathfrak{a}^{HAS} = \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{a}^{abs} \tag{12}$$

erfolgen.

**6. Aufstellung der Differentialgleichungen.** Die Vektorgleichungen (1) sollen zunächst in den Komponenten des absoluten, raumfesten $(x, y, z)$-Systems geschrieben werden, da sich ihre Lösungen dann leicht angeben lassen. Anschließend sollen diese Lösungen mit Hilfe der Transformationsmatrix $\mathfrak{A}_2$ im Hauptachsensystem dargestellt werden.

Im $(x, y, z)$-System hat man die Komponentendarstellung

$$\mathfrak{K} = (Q_x, Q_y, N_z), \qquad \mathfrak{k} = (0, 0, q).$$

Das gibt für (1)

$$\frac{dQ_x}{ds} = 0, \qquad \frac{dQ_y}{ds} = 0, \qquad \frac{dN_z}{ds} = q. \tag{13}$$

Hierfür lauten die Lösungen

$$\mathfrak{K}^{abs} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A = \text{konst.} \\ B = \text{konst.} \\ -P - \int_s^l q\, ds \end{pmatrix}, \tag{14}$$

und aus $\mathfrak{K}^{HAS} = \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{K}^{abs}$ folgt

$$\mathfrak{K}^{HAS} = \begin{pmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \\ N_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\chi + B\sin\chi - e_\xi \left(P + \int_s^l q\, ds\right) \\ -A\sin\chi + B\cos\chi - e_\eta \left(P + \int_s^l q\, ds\right) \\ -P - \int_s^l q\, ds \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Die Vektorgleichungen (4) lauten in den Komponenten des Hauptachsensystems

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dM_\xi}{ds} - M_\eta \tau_\zeta + T\,\omega_\eta = Q_\eta, \\ &\frac{dM_\eta}{ds} + M_\xi \tau_\zeta - T\,\omega_\xi = -Q_\xi, \\ &\frac{dT}{ds} + M_\eta\,\omega_\xi - M_\xi\,\omega_\eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Setzt man hierin (6) und (15) ein und ordnet um, so hat man

$$\left.\begin{aligned} &a\frac{d\omega_\xi}{ds} + (c-a)\,\tau_\zeta\,\omega_\eta + e_\eta\left(P + \int_s^l q\, ds\right) = -A\sin\chi + B\cos\chi, \\ &a\frac{d\omega_\eta}{ds} - (c-a)\,\tau_\zeta\,\omega_\xi - e_\xi\left(P + \int_s^l q\, ds\right) = -A\cos\chi - B\sin\chi, \\ &c\,\frac{d\tau_\zeta}{ds} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die dritte Gleichung (17) kann sofort integriert werden und gibt

$$c\,\tau_\zeta = \text{konst.}, \qquad \left\{\begin{matrix} c = \text{konst.}, \\ \tau_\zeta = \text{konst.} \end{matrix}\right\}, \qquad c\,\tau_\zeta = T\,. \tag{18}$$

Jetzt sollen statt der Größen $\omega_\xi$ und $\omega_\eta$ Ausdrücke eingeführt werden, die nur $e_\xi$, $e_\eta$ und ihre ersten Ableitungen enthalten. Nach (8) ist

$$\omega_\xi = \cos\varphi\,\dot\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\,\dot\psi\,.$$

Wegen der Voraussetzung $\cos\vartheta = 1$ kann man beide Glieder der rechten Summe mit $\cos\vartheta$ multiplizieren und erhält

$$\omega_\xi = \cos\varphi\cos\vartheta\,\dot\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\psi\,.$$

Jetzt werde auf der rechten Seite der Gleichungen noch $-\sin\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta$ und $+\sin\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta$ hinzugefügt, so daß sich nichts ändert. Dann kann man anders zusammenfassen:

$$\omega_\xi = -\sin\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta\,\dot\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\,(\cos\vartheta\,\dot\psi + \dot\varphi)\,. \tag{19}$$

Aus (11) entnimmt man

$$e_\xi = \sin\varphi\sin\vartheta\,, \qquad e_\eta = \cos\varphi\sin\vartheta\,,$$

also

$$\dot e_\eta = -\sin\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta\,\dot\vartheta$$

und aus (8)

$$\tau_\zeta = \cos\vartheta\,\dot\psi + \dot\varphi\,.$$

Vergleicht man dies mit dem rechten Teil von (19), so sieht man, daß

$$\omega_\xi = \dot e_\eta + e_\xi\,\tau_\zeta \tag{20}$$

ist. Ganz entsprechend findet man

$$\omega_\eta = -\dot e_\xi + e_\eta\,\tau_\zeta\,. \tag{21}$$

Mit Hilfe von (20) und (21) kann man die ersten beiden Gleichungen (17) anders schreiben. Man beachte außerdem, daß wegen der Konstanz von $\tau_\zeta$ gemäß (18)

$$\chi = \int_0^s \tau_\zeta\,ds = \tau_\zeta\,s \tag{22}$$

wird. Man benutze die Abkürzungen

$$\frac{A}{a} = A^*, \qquad \frac{B}{a} = B^*$$

und schreibe noch für die gegebene Größe

$$\int_s^l q\,ds = Q(s)\,; \tag{23}$$

so erhält man statt (17)

$$\left.\begin{aligned} \ddot e_\eta + \left(2 - \frac{c}{a}\right)\tau_\zeta\,\dot e_\xi + \left[\left(\frac{c}{a} - 1\right)\tau_\zeta^2 + \frac{P}{a} + \frac{Q(s)}{a}\right] e_\eta &= -A^*\sin\tau_\zeta\,s + B^*\cos\tau_\zeta\,s\,, \\ \ddot e_\xi - \left(2 - \frac{c}{a}\right)\tau_\zeta\,\dot e_\eta + \left[\left(\frac{c}{a} - 1\right)\tau_\zeta^2 + \frac{P}{a} + \frac{Q(s)}{a}\right] e_\xi &= A^*\cos\tau_\zeta\,s + B^*\sin\tau_\zeta\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Das ganze Problem ist damit auf die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems (24) von zweiter Ordnung, mit variablen Koeffizienten bei $e_\xi$ bzw. $e_\eta$, zurückgeführt.

Zu seiner vollständigen Formulierung müssen nun noch die Randbedingungen angegeben werden.

**7. Randbedingungen.** Die Randbedingungen ergeben sich aus der Art der Stablagerung. Wie man aus Abb. 1 abliest, sind folgende Fälle zu berücksichtigen:

a) Die Stabenden sind frei von Querkräften. Das ist der Fall, wenn die Stabenden in der Horizontalen frei verschieblich sind. Aus (14) ersieht man, daß dies bedeutet

$$A = 0\,, \qquad B = 0\,. \tag{25}$$

Dann werden die Gleichungen (24) homogen.

b) Die Stabenden sind fest eingespannt. Im Falle einer Einspannung fällt am Stabende der lotrechte Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ mit dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ zusammen. Dieser hat aber im Hauptachsensystem die Komponenten $(0, 0, 1)$, und da jetzt $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ sein soll, so verschwinden die ersten beiden Komponenten des Vektors $\mathfrak{e}$:

$$e_\xi = 0\,, \qquad \varepsilon_\eta = 0\,. \tag{26}$$

c) Das Stabende ist unverschieblich, oder es ist in Richtung der ursprünglichen Stabachse geführt. In diesem Fall muß der Vektor $\mathfrak{x}_p = (x, y)$ für $s = l$, der in der durch den Stabanfang gehenden Horizontalebene liegt und der auf ein raumfestes $(x, y, z)$-System mit dem Ursprung im Stabanfang bezogen ist, gleich Null sein. Nun ist aber

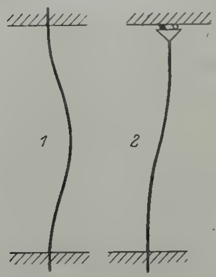

Abb. 1. Lagerfall 1 und 2.

$$\mathfrak{x}_p = \int_0^s \mathfrak{t}_p \, ds$$

mit

$$\mathfrak{t}_p^{abs} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) = (\dot{x}, \dot{y})\,.$$

Der Vektor $\mathfrak{t}_p^{HAS} = -(e_\xi\, e_\eta)$ werde mittels der Matrix $\mathfrak{A}_2$ umgeschrieben:

$$\mathfrak{t}_p^{abs} = (\dot{x}, \dot{y}) = \mathfrak{A}_2^T\, \mathfrak{t}_p^{HAS}\,.$$

Daraus folgt

$$\dot{x} = -(e_\xi \cos\chi - e_\eta \sin\chi)\,, \qquad \dot{y} = -(e_\xi \sin\chi + e_\eta \cos\chi)\,.$$

Das gibt als Randbedingung

$$\mathfrak{x}_p = \int_0^l \mathfrak{t}_p \, ds = 0; \qquad \left.\begin{aligned} &\int_0^l (e_\xi \cos\chi - e_\eta \sin\chi)\, ds = 0\,, \\ &\int_0^l (e_\xi \sin\chi + e_\eta \cos\chi)\, ds = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

**8. Die Lösung der homogenen Differentialgleichungen.** Es werden die homogenen Gleichungen (24) mit der Abkürzung

$$G = -\left(\frac{P}{a} + \frac{Q(s)}{a}\right)$$

geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{e}_\eta + \left(2 - \frac{c}{a}\right)\tau_\zeta\, \dot{e}_\xi + \left[\left(\frac{c}{a} - 1\right)\tau_\zeta^2 - G\right] e_\eta = 0\,, \\ \ddot{e}_\xi - \left(2 - \frac{c}{a}\right)\tau_\zeta\, \dot{e}_\eta + \left[\left(\frac{c}{a} - 1\right)\tau_\zeta^2 - G\right] e_\xi = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

und es kann gezeigt werden, daß sie formal mit den Bewegungsgleichungen eines Punktes auf einer Kugelfläche in einem zeitlich veränderlichen Kraftfeld mit dem Feldvektor

$$\mathfrak{V} = -m\, V(t)\, \mathfrak{e}_\zeta \tag{29}$$

übereinstimmen. Es soll $t$ im folgenden die Zeit bedeuten.

Die Bewegung werde beschrieben in einem Achsenkreuz $(\xi, \eta, \zeta)$, das seinen Ursprung im Mittelpunkt der Kugel hat, dessen $\zeta$-Achse durch die Pole der Kugel geht, und dessen $(\xi, \eta)$-Ebene um die $\zeta$-Achse gleichförmig mit der Drehgeschwindigkeit

$$\mathfrak{u} = (0, 0, u)$$

rotiert. Ist $R = 1$ der Halbmesser der Kugel, so lauten die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen für das raumfeste Inertialsystem $(x, y, z)$

$$m\,\ddot{x} = m\lambda\, x\,, \qquad m\,\ddot{y} = m\lambda\, y\,, \qquad m\,\ddot{z} = -m\, V(t) + m\lambda\, z\,,$$

wenn

$$F = \frac{m}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

die Zwangsbedingung für die Bewegung auf der Kugel und $\lambda$ ein noch unbestimmter Parameter sind.

Um diese Gleichungen für das bewegte $(\xi, \eta, \zeta)$-System umzuschreiben, muß man von den Gesetzen der Relativbewegung Gebrauch machen und erhält in vektorieller Form

$$m\, \overline{\mathfrak{b}_r} = \mathfrak{V} - 2\, m\, \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_r - m\, \mathfrak{u} \times (\mathfrak{u} \times \mathfrak{r}) + \lambda \,\mathrm{grad}\, F\,. \tag{30}$$

Dabei soll außer den bereits erklärten Größen noch $\bar{b}_r$ der Vektor der Relativbeschleunigung, $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor in der $(\xi, \eta)$-Ebene, welcher senkrecht zu $\mathfrak{u}$ ist, und $\mathfrak{v}_r$ der Vektor der Relativgeschwindigkeit sein. Schreibt man (30) in Komponenten, so gibt das

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= 2\,m\,u\frac{d\eta}{dt} + m\,\xi\,u^2 + m\lambda\,\xi\,, \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\,m\,u\frac{d\xi}{dt} + m\,\eta\,u^2 + m\,\lambda\,\eta\,, \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m\,V + m\lambda\zeta\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Es ist aber $d^2\zeta/dt^2 = 0$ und $\zeta \approx 1$, wenn nur solche Bewegungen betrachtet werden, bei denen $\xi$ und $\eta$ kleine Größen bleiben. Diese Annahme ist im Einklang mit der beim Stab gemachten Voraussetzung kleiner Verformungen.

Dann folgt aus der dritten Gleichung (31)

$$\lambda = V,$$

und damit lassen sich die beiden ersten Gleichungen (31) schreiben

$$\ddot{\xi} - 2\,u\,\dot{\eta} - (u^2 + V)\,\xi = 0\,, \qquad \ddot{\eta} + 2\,u\,\dot{\xi} - (u^2 + V)\,\eta = 0\,. \tag{32}$$

Die Gleichungen (32) stimmen mit den Gleichungen (28) genau überein, wenn

$$u = \left(1 - \frac{c}{2\,a}\right)\tau_\zeta\,, \qquad \text{und} \qquad V = G - \left(\frac{c\,\tau_\zeta}{2\,a}\right)^2$$

ist.

Von der Relativbewegung des Punktes auf der Kugelfläche interessiert die Projektion der Bewegung auf die $(\xi, \eta)$-Ebene. Die Bahnkurvengleichung ist bezüglich des $(\xi, \eta)$-Systems zu bestimmen. Hat man sie gefunden, so hat man mit Rücksicht auf die Übereinstimmung zwischen (32) und (28) auch die Lösung für die homogenen Differentialgleichungen des Stabes erhalten.

Die Gleichungen (32) lassen sich mittels $\varrho = \xi + i\,\eta$ komplex zusammenfassen zu

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} + 2\,i\,u\frac{d\varrho}{dt} - (u^2 + V)\,\varrho = 0\,. \tag{33}$$

Im raumfesten $(x, y)$-Kreuz sei der Ortsvektor $r = x + i\,y$ erklärt. Dann ist

$$\varrho = r\,e^{-i\,u\,t} \tag{34}$$

die Beziehung zwischen den beiden Darstellungen des Ortsvektors im bewegten $(\xi, \eta)$- und im raumfesten $(x, y)$-Kreuz.

Setzt man (34) in (33) ein, so erhält man

$$\ddot{r} - V\,r = 0\,, \tag{35}$$

was die Bewegung des Punktes im raumfesten $(x, y)$-System beschreibt.

Aus (35) folgt: Der Punkt bewegt sich mit seiner Projektion auf dem in der $(x, y)$-Ebene festliegenden Ortsvektor $r$. Die Bewegung gegenüber der rotierenden $(\xi, \eta)$-Ebene wird aus der Lösung von (35) erhalten, wenn man gemäß (34) mit $e^{-i\,u\,t}$ multipliziert, was der Überlagerung einer Rotation mit $\mathfrak{u}$ entspricht. Der im $(\xi, \eta)$-System feste Beobachter wird also die Projektion des Punktes als Bewegung auf dem Fahrstrahl $\varrho$ sehen, der seinerseits mit der konstanten Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um den Ursprung rotiert.

Die durch (35) festgelegte Bewegung auf dem Fahrstrahl wird nun je nach der Art von

$$V = -\left(\frac{P}{a} + \frac{Q(t)}{a} + \left(\frac{c\,\tau_\zeta}{2\,a}\right)^2\right)$$

verschiedener Natur sein. Die Größen $P/a$ und $c\,\tau_\zeta/2\,a$ sind Konstante. Die Art von $V$ ist also im Wesentlichen durch $Q(t)$ bestimmt. Ist $Q(t)$ im Sonderfall auch konstant, so ist $V =$ konst. und (35) beschreibt eine harmonische Bewegung. Das gilt natürlich insbesondere für $Q(t) = 0$. Wegen der dann auftretenden harmonischen Bewegung der Projektion des Punktes zeigt es sich, daß der Punkt in diesem Sonderfall sich wie der eines *Foucault*schen Pendels verhält.

Im allgemeinen Fall wird $Q(t)$ weder Null noch konstant sein. Dann stellt (35) eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform mit veränderlichem Koeffizienten $V$ dar.

Die Differentialgleichung (35) habe die partikulären Lösungen

$$r = r_h(t)\ (h = 1, 2)\,.$$

Dann findet man die Lösung von (33), indem man mit $e^{-iut}$ multipliziert:

$$\varrho_h = r_h(t)\, e^{-iut}\ (h = 1, 2)\,.$$

Die allgemeine Lösung von (33) ist also

$$\varrho = \xi + i\,\eta = [\mathfrak{A}\, r_1(t) + \mathfrak{B}\, r_2(t)]\, e^{-iut} \tag{36}$$

mit den beiden komplexen Integrationskonstanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Mit (36) hat man sowohl die Projektion der Bahn des Punktes im bewegten System als auch die Lösung für die homogenen Differentialgleichungen des Stabes erhalten. Man braucht für den Stab nur überall statt $t$ die Variable $s$ zu schreiben und

$$u = \left(2 - \frac{c}{a}\right)\frac{\tau_\zeta}{2}$$

zu setzen.

Wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung für die Lösung des Problems soll (35) die Basisgleichung heißen.

**9. Die Eigenwerte für Lagerfall *2* und $q(s) = 0$ bzw. $q(s) = q =$ konst.** Im Lagerfall *2* von Abb. 1 sind die Stabenden frei von Querkräften, so daß dic Randbedingungen (26) gelten. Die Differentialgleichungen des Stabes werden daher homogen und man hat mit (36) die Lösung schon zur Verfügung.

a) $q(s) = 0$. Das gibt für die Basisgleichung

$$\frac{d^2r}{ds} + \left[\frac{P}{a} + \left(\frac{c\,\tau_\zeta}{2\,a}\right)^2\right] r = 0\,. \tag{37}$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\frac{P}{a} + \left(\frac{c\,\tau_\zeta}{2\,a}\right)^2 = v_0^2\,, \tag{38}$$

so lautet die Lösung von (37)

$$r_1 = \sin v_0\, s\,, \quad r_2 = \cos v_0\, s\,.$$

Bezugnehmend auf die Analogie zum bewegten Punkt, kann man sagen, daß die Punktprojektion im raumfesten $(x, y)$-System eine lineare, harmonische Schwingung auf dem Fahrstrahl ausführt. Bezüglich des mit $\mathfrak{u}$ rotierenden $(\xi, \eta)$-Systems liegt also die bereits erwähnte *Foucaultsche* Pendelbewegung vor.

Die allgemeine Lösung von $\varrho(s)$ wird zu

$$\varrho(s) = e_\xi + i\, e_\eta = [\mathfrak{A} \sin v_0\, s + \mathfrak{B} \cos v_0\, s]\, e^{-ius}\,. \tag{39}$$

Auf (39) sind zur Bestimmung der Eigenwerte die Randbedingungen (26) in komplexer Schreibweise anzuwenden:

$$\varrho = e_\xi + i\, e_\eta = 0 \quad \text{für} \quad s = 0 \quad \text{und} \quad s = l, \tag{40}$$

was zu der Forderung nach der Singularität der Matrix

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin v_0\, l\, e^{-iul} & \cos v_0\, l\, e^{-iul} \end{pmatrix},$$

also $\det \mathfrak{C} = 0$ führt. Dies gibt

$$\sin v_0\, l\, e^{-iul} = 0\,,$$

woraus unmittelbar die Eigenwertgleichung

$$\sin v_0\, l = 0\,, \qquad \text{also} \quad v_0\, l = \pi \tag{41}$$

folgt. Verwendet man noch (38) und $c\,\tau_\zeta = T$, so hat man sofort die bekannte *Greenhill*sche Formel vor sich

$$\frac{P}{a} + \left(\frac{T}{2\,a}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

b) $q(s) = q =$ konst. Die Basisgleichung lautet jetzt wegen $Q(s) = \int_s^l q\, ds = q\,(l - s)$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \left[\frac{P}{a}\,\frac{q\,(l - s)}{a} + \left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^2\right] r = 0\,. \tag{42}$$

Nun seien die Abkürzungen eingeführt

$$\alpha = \frac{P}{a} + \frac{q\,l}{a} + \left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^2, \qquad \beta = \frac{q}{a}, \tag{43}$$

womit (42) in

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + (\alpha - \beta\, s)\, r = 0 \tag{44}$$

übergeht. Wendet man auf (44) die Transformation

$$\mathfrak{z} = \alpha\, \beta^{-2/3} - \beta^{1/3}\, s \tag{45}$$

an, so erhält man

$$\frac{d^2 r}{d\mathfrak{z}^2} + \mathfrak{z}\, r = 0\,. \tag{46}$$

Aus (46) läßt sich mittels einer *Lommel*-Transformation eine *Bessel*sche Differentialgleichung herstellen, so daß man für (46) die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$r_1 = \mathfrak{z}^{1/2}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}^{3/2}\right), \qquad r_2 = \mathfrak{z}^{1/2}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}^{3/2}\right) \tag{47}$$

erhält. Die allgemeine Lösung für die Differentialgleichungen des Stabes lautet daher in diesem Fall

$$\varrho(s) = e_\xi + i\, e_\eta = \left[\mathfrak{A}\, \mathfrak{z}^{1/2}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}^{3/2}\right) + \mathfrak{B}\, \mathfrak{z}^{1/2}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}^{3/2}\right)\right] e^{-i u s}\,. \tag{48}$$

Auf (48) sind wieder die komplexen Randbedingungen (40) anzuwenden. Für $s = 0$ und $s = l$ hat man nach (43) und (45) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} s = 0: &\qquad \mathfrak{z}_0 = \alpha\, \beta^{-2/3} &&= \left[\frac{P}{a} + \frac{q\,l}{a} + \left(\frac{T}{2\,a}\right)^2\right] \left(\frac{q}{a}\right)^{-2/3}, \\ s = l: &\qquad \mathfrak{z}_l = \alpha\, \beta^{-2/3} - \beta^{1/3}\, l &&= \left[\frac{P}{a} + \left(\frac{T}{2\,a}\right)^2\right] \left(\frac{q}{a}\right)^{-2/3}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Hiermit geben die Randbedingungen wieder die Forderung nach der Singulariät der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{z}_0^{1/2}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_0^{3/2}\right) & \mathfrak{z}_0^{1/2}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_0^{3/2}\right) \\ \mathfrak{z}_l^{1/2}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_l^{3/2}\right) e^{-i u l} & \mathfrak{z}_l^{1/2}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_l^{3/2}\right) e^{-i u l} \end{pmatrix}.$$

Setzt man ihre Determinante gleich Null, so findet man als Eigenwertgleichlung

$$J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_0^{3/2}\right) J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_l^{3/2}\right) = J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_l^{3/2}\right) J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_0^{3/2}\right). \tag{50}$$

Man kann nun noch die Funktion

$$\mathrm{ctb}_{1/3}\,(z) \equiv \frac{J_{1/3}(z)}{J_{-1/3}(z)} \tag{51}$$

einführen. Ihre Reziproke hat für große Werte des Argumentes $z$ einen tg-ähnlichen Verlauf. Ihr Funktionsbild ist in Abb. 2 dargestellt.

Man kann die Eigenwertgleichung (50) mit Hilfe von $\mathrm{ctb}_{1/3}(z)$ schreiben

$$\mathrm{ctb}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_0^{3/2}\right) = \mathrm{ctb}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_l^{3/2}\right) \tag{52}$$

Die Ermittlung des kleinsten Eigenwertes geht daher folgendermaßen vor sich: Gegeben seien $T$, $P$, $q$, $a$. Auf Grund von (52) erhält man die zu diesen Daten gehörende Knicklänge $l_{krit.}$ des Stabes. Denn die gegebenen Größen gestatten es, gemäß (49) den Wert $z_l = \frac{2}{3}\, \mathfrak{z}_l^{3/2}$ zu errechnen. Die weitere Lösung sei graphisch durchgeführt. Man sucht auf der Abszissenachse des Funktionsbildes (Abb. 2) den errechneten Wert $z_l$ auf. Zu diesem $z_l$ liest man die Ordinate $\mathrm{ctb}_{1/3}(z_l)$ ab. Im Abstand dieser Ordinate zieht man eine Parallele zur $z$-Achse. Es interessiert der erste rechts von $z_l$ gelegene Schnittpunkt der Parallelen mit dem betreffenden Zweig der Funktion $\mathrm{ctb}_{1/3}(z)$; denn

die zu diesem Schnittpunkt gehörende Abszisse ist $z_0 = \frac{2}{3}\,\mathfrak{z}_0^{3/2}$. Mit Hilfe des soeben gefundenen $z_0$ kann man dann nach (49) ausrechnen:

$$l_{krit.} = \left[\left(\frac{3}{2}\,z_0\right)^{2/3} - \left(\frac{T^2 + 4\,a\,P}{4\,a^2}\right)\left(\frac{a}{q}\right)^{2/3}\right]\left(\frac{a}{q}\right)^{1/3}. \tag{53}$$

Zwei Zahlenbeispiele:

1) $T = 10^4$ kpm, $a = 10^5$ kpm², $q = 10^3$ kp/m, $P = 0$,
2) $T = 10^4$ kpm, $a = 10^5$ kpm², $q = 60$ kp/m, $P = 10^3$ kp.

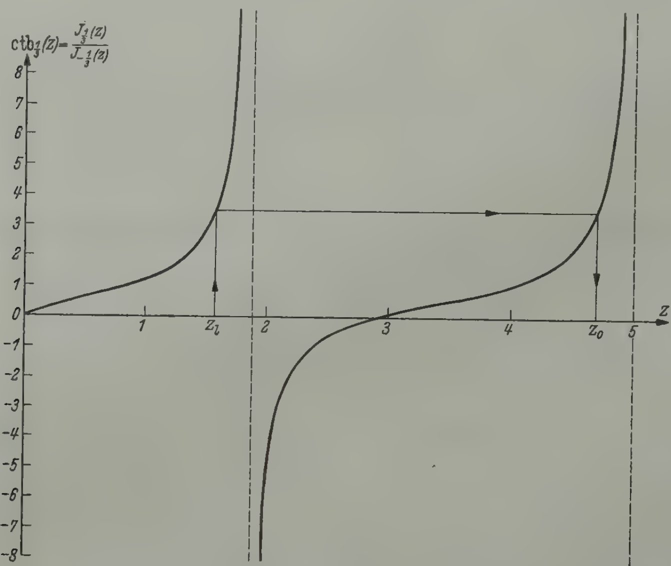

Abb. 2.

Aus der zweiten Gleichung (49) erhält man

$$1)\quad z_l = \frac{2}{3}\,\mathfrak{z}_l^{3/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{10^8}{4\cdot 10^{10}}\right)^{3/2}\frac{10^5}{10^3} = 0{,}008\,,$$

$$2)\quad z_l = \frac{2}{3}\,\mathfrak{z}_l^{3/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{10^8}{4\cdot 10^{10}} + \frac{10^3}{10^5}\right)^{3/2}\frac{10^5}{60} = 1{,}56\,.$$

Hierfür findet man graphisch

$$1)\ z_0 \approx 2{,}92\,, \qquad 2)\ z_0 \approx 4{,}66\,,$$

und es ist nach (53)

$$1)\quad l_{krit.} = \left[\left(\frac{3}{2}\,2{,}92\right)^{2/3} - \frac{10^8}{4\cdot 10^{10}}(10^2)^{2/3}\right](10^2)^{1/3} = 12{,}1\ \mathrm{m}\,,$$

$$2)\quad l_{krit.} = \left[\left(\frac{3}{2}\,4{,}66\right)^{2/3} - (1{,}67\cdot 10^3)^{2/3}\left(\frac{1{,}25}{10^2}\right)\right](1{,}67\cdot 10^3)^{1/3} = 22{,}5\ \mathrm{m}\,.$$

Wäre die Längskraft nicht gleichmäßig verteilt, sondern konzentriert als Einzelkraft an den Stabenden angebracht:

$$1)\ P = 12\cdot 10^3\ \mathrm{kp}\,, \qquad 2)\ P = 60\cdot 22{,}5 = 1350\ \mathrm{kp}\,,$$

so wäre die hierfür entsprechende Knicklänge nach der *Greenhill*schen Formel zu ermitteln. Sie würde dann nur

$$1)\quad l_{krit.} = 2\,\pi\,10^5\,(10^8 + 4\cdot 10^5\cdot 12\cdot 10^3)^{-1/2} = 9\ m\,,$$

$$2)\quad l_{krit.} = 2\,\pi\,10^5\,(10^8 + 4\cdot 10^5\cdot 2{,}35\cdot 10^3)^{-1/2} = 19{,}5\ \mathrm{m}$$

betragen.

An Stelle von (53) kann man noch eine sehr brauchbare Näherungsformel angeben. Es sei $z_0 = \varepsilon\pi + z_l$, wo $\varepsilon$ ein veränderlicher Parameter ist. Nun ist aber für die als Abszissen von $\mathrm{ctb}_{1/3}(z)$ auftretenden Wertepaare $z_0$ und $z_l$ der Parameter $\varepsilon$ stets sehr nahe bei 1. Dies gilt insbesondere für große Argumente $z$. Es läßt sich nämlich zeigen, daß $\mathrm{ctb}_{1/3}(z)$ für große Werte von $z$ asymptotisch gegen eine Funktion mit der Periode $\pi$ geht. Dann folgt tatsächlich aus $\mathrm{ctb}_{1/3}(z_0) = \mathrm{ctb}_{1/3}(z_l)$ die Beziehung $z_0 \approx \pi + z_l$.

Es ist

$$J_{-1/3}(z) = J_{1/3}(z)\,\frac{1}{2} - N_{1/3}(z)\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

wo $N_{1/3}(z)$ die *Neumann*sche Funktion bedeutet, also folgt

$$\frac{1}{\mathrm{ctb}_{1/3}(z)} = \frac{J_{-1/3}(z)}{J_{1/3}(z)} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{N_{1/3}(z)}{J_{1/3}(z)}.$$

Es gilt asymptotisch

$$N_{1/3}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{5\pi}{12}\right), \qquad J_{1/3}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{5\pi}{12}\right)$$

und somit

$$[\mathrm{ctb}_{1/3}(z)]^{-1} \sim \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{tg}\left(z - \frac{5\pi}{12}\right).$$

Das ist aber eine Funktion mit der Periode $\pi$, so daß die oben angestellten Überlegungen richtig sind.

Es läßt sich daher mit

$$z_0 \sim \pi + z_l = \pi + \frac{2}{3}\,\mathfrak{z}_l^{3/2} = \pi + \frac{2}{3}\left(\frac{4aP + T^2}{4a^2}\right)^{3/2}\frac{a}{q}$$

aus (53) die Näherungsformel ableiten:

$$l_{krit.} \sim \left\{\left[\frac{12\pi q a^2}{(4aP + T^2)^{3/2}} + 1\right]^{2/3} - 1\right\}\frac{4aP + T^2}{4aq}. \tag{54}$$

Die Güte dieser Näherungsformel kann sofort an den bereits behandelten Zahlenbeispielen nachgeprüft werden. Man erhält mit ihr für

Beispiel 1: $\quad l_{krit.} \sim \left[\left(\frac{12\pi\,10^3}{10^{12}} + 1\right)^{2/3} - 1\right]0{,}25 = 12{,}8\ \mathrm{m},$

Beispiel 2: $\quad l_{krit.} \sim \left[\left(\frac{12\pi\,60\cdot 10^{10}}{(4\cdot 10^8 + 10^8)^{3/2}} + 1\right)^{2/3} - 1\right]\frac{4\cdot 10^8 + 10^8}{4\cdot 10^5\cdot 60} = 22{,}5\ \mathrm{m}.$

**10. Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen des Stabes.** Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichungen (24) wird sich aus der allgemeinen Lösung (36) des homogenen Systems und aus zwei partikulären Lösungen des inhomogenen Systems zusammensetzen.

Die Ermittlung der partikulären Lösungen soll mittels der Methode der Variation der Konstanten erfolgen, wobei auch jetzt wieder die beiden reellen Lösungen zu einer komplexen zusammengefaßt werden sollen.

Zuerst wird das inhomogene Differentialgleichungssystem (24) komplex geschrieben, und man erhält mit den schon bekannten Abkürzungen $V$ und $u$

$$\frac{d^2\varrho}{ds^2} + 2iu\frac{d\varrho}{ds} - (u^2 + V)\varrho = A^* e^{-i\tau s} + iB^* e^{-i\tau s} = \mathfrak{C}\, e^{-i\tau s}. \tag{55}$$

Setzt man (34) in (55) ein, so folgt mit $\tau - u = w$

$$\ddot{r} - Vr = \mathfrak{C}\, e^{-iws}. \tag{56}$$

Es seien $r_1$ und $r_2$ die beiden linear unabhängigen Lösungen und $r = \mathfrak{A}\, r_1 + \mathfrak{B}\, r_2$ die allgemeine Lösung von (35). Dann kann für die partikuläre Lösung mit den zu variierenden „Konstanten" $\mathfrak{A}(s)$ und $\mathfrak{B}(s)$ der Ansatz gemacht werden

$$r = \mathfrak{A}(s)\, r_1 + \mathfrak{B}(s)\, r_2\,.$$

Das führt für die Funktionen $\mathfrak{A}(s)$ und $\mathfrak{B}(s)$ auf die Bedingungsgleichungen

$$\dot{\mathfrak{A}}\, r_1 + \dot{\mathfrak{B}}\, r_2 = 0\,, \qquad \dot{\mathfrak{A}}\, \dot{r}_1 + \dot{\mathfrak{B}}\, \dot{r}_2 = \mathfrak{C}\, e^{-iws}. \tag{57}$$

Nennt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \end{vmatrix},$$

die die Determinante des Gleichungssystems (57) und auch die *Wronski*sche Determinante des Fundamentalsystems der homogenen Basisgleichung ist, kurz $W$, so liest man für $\dot{\mathfrak{A}}$ und $\dot{\mathfrak{B}}$ aus (57) ab

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & r_2 \\ \mathfrak{C}\, e^{-i w s} & \dot{r}_2 \end{vmatrix}}{W} = -\frac{\mathfrak{C}}{W} r_2\, e^{-i w s}, \quad \dot{\mathfrak{B}} = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 0 \\ \dot{r}_1 & \mathfrak{C}\, e^{-i w s} \end{vmatrix}}{W} = \frac{\mathfrak{C}}{W} r_1\, e^{-i w s}.$$

Im vorliegenden Fall ist übrigens $W$, als *Wronski*sche Determinante der Gleichung (35), stets eine Konstante, da das Glied $\dot{r}$ in der Differentialgleichung nicht vorkommt. Deshalb erhält man durch Integration für $\mathfrak{A}(s)$ und $\mathfrak{B}(s)$

$$\mathfrak{A}(s) = -\frac{\mathfrak{C}}{W} \int_0^s r_2\, e^{-i w s}\, ds\,, \qquad \mathfrak{B}(s) = \frac{\mathfrak{C}}{W} \int_0^s r_1\, e^{-i w s}\, ds\,. \tag{58}$$

Geht man mit (58) in die Gleichung $r = \mathfrak{A}(s)\, r_1 + \mathfrak{B}(s)\, r_2$ ein, so ergibt sich als partikuläre Lösung der inhomogenen Basisgleichung

$$r = \frac{\mathfrak{C}}{W} \left[ -r_1 \int_0^s r_2\, e^{-i w s}\, ds + r_2 \int_0^s r_1\, e^{-i w s}\, ds \right]. \tag{59}$$

Mit (59) findet man

$$\varrho = \frac{\mathfrak{C}}{W} e^{-i w s} \left[ -r_1 \int_0^s r_2\, e^{-i w s}\, ds + r_2 \int_0^s r_1\, e^{-i w s}\, ds \right],$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (55) lautet dann

$$\varrho = e_\xi + i\, e_\eta = \left\{ \mathfrak{A}\, r_1(s) + \mathfrak{B}\, r_2(s) + \frac{\mathfrak{C}}{W} \left[ -r_1(s) \int_0^s r_2(s)\, e^{-i w s}\, ds + r_2(s) \int_0^s r_1(s)\, e^{-i w s}\, ds \right] \right\} e^{-i u s}. \tag{60}$$

**11. Die Eigenwerte für Lagerfall *1* und $q(s) = 0$ bzw. $q(s) = q = \text{const.}$** Für den Lagerfall *1* von Abb. 1 gelten die Randbedingungen (26) und (27), die beide in komplexer Schreibweise anzuwenden sind:

$$\varrho = e_\xi + i\, e_\eta = 0 \quad \text{für} \quad s \text{ gleich } 0 \text{ und } s = l\,, \qquad \int_0^l (e_\xi + i\, e_\eta)\, e^{i \tau s}\, ds = 0\,.$$

a) $q(s) = 0$. Hierfür sind die Lösungen der Basisgleichung wieder

$$r_1 = \sin v_0\, s\,, \quad r_2 = \cos v_0\, s\,,$$

und es folgt aus (60) nach Ausrechnung der Integrale und von $W$

$$\varrho = e_\xi + i\, e_\eta = \mathfrak{A} \sin v_0\, s\, e^{-i u s} + \mathfrak{B} \cos v_0\, s\, e^{-i u s} + \mathfrak{C}\, e^{-i \tau s}. \tag{61}$$

Die Eigenwerte erhält man mittels der Randbedingungen. Die Bedingung $\varrho = 0$ für $s = 0$ führt zu

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0\,, \qquad \mathfrak{C} = -\mathfrak{B}\,,$$

womit aus der allgemeinen Lösung (61)

$$\varrho = e_\xi + i\, e_\eta = \mathfrak{A} \sin v_0\, s\, e^{-i u s} + B\, (\cos v_0\, s\, e^{-i u s} - e^{-i \tau s})$$

wird.

Dann ist aber

$$\varrho\, e^{i \tau s} = \mathfrak{A} \sin v_0\, s\, e^{i w s} + \mathfrak{B}\, (\cos v_0\, s\, e^{i w s} - 1)\,,$$

und die restlichen Randbedingungen ergeben die Knickdeterminantengleichung

$$\begin{vmatrix} \sin v_0\, l\, e^{-i u l} & \cos v_0\, l\, e^{-i u l} - e^{-i \tau l} \\ \int_0^l \sin v_0\, s\, e^{i w s}\, ds & \int_0^l (\cos v_0\, s\, e^{i w s} - 1)\, ds \end{vmatrix} = 0\,. \tag{62}$$

Es gilt noch

$$v_0^2 - w^2 = \frac{a}{P} \qquad \text{und} \qquad \tau - u = w = \frac{c\, \tau}{2\, a} = \frac{T}{2\, a},$$

was im folgenden verwendet werden soll.

Die weitere Ausrechnung bringt zunächst

$$\int_0^l \sin v_0 s\, e^{i w s}\, ds = \frac{a}{P}\left[e^{i w l}(i w \sin v_0 l - v_0 \cos v_0 l) + v_0\right],$$

$$\int_0^l \cos v_0 s\, e^{i w s}\, ds = \frac{a}{P}\left[e^{i w l}(i w \cos v_0 l + v_0 \sin v_0 l) - i w\right],$$

und damit erhält man aus (62) als Eigenwertgleichung

$$\sin v_0 l\, e^{-i u l}\left\{\frac{a}{P}\left[e^{i w l}(i w \cos v_0 l + v_0 \sin v_0 l) - i w\right] - l\right\}$$
$$= (\cos v_0 l\, e^{-i u l} - e^{-i \tau l})\left\{\frac{a}{P}\left[e^{i w l}(i w \sin v_0 l - v_0 \cos v_0 l) + v_0\right]\right\}.$$

Multipliziert man aus und faßt weiter zusammen, so bleibt eine sich als reell erweisende Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte, wie sie bereits bei *M. Beck*[1] vorkommt:

$$\frac{P}{a} l \sin v_0 l + 2 v_0 \left(\cos v_0 l - \cos \frac{T}{2a} l\right) = 0 .$$

b) $q(s) = q =$ konst. Setzt man zur Abkürzung

$$-r_1(s)\int_0^s r_2(s)\, e^{-i w s}\, ds + r_2(s)\int_0^s r_1(s)\, e^{i w s}\, ds = p(s),$$

so schreibt sich (60)

$$\varrho = \left[\mathfrak{A}\, r_1(s) + \mathfrak{B}\, r_2(s) + \frac{\mathfrak{C}}{W} p(s)\right] e^{-i u s},$$

und die Randbedingungen führen zu den die Bestimmungsgleichungen

$$\mathfrak{A}\, r_1(0) + \mathfrak{B}\, r_2(0) + \frac{\mathfrak{C}}{W} p(0) = 0,$$

$$\mathfrak{A}\, r_1(l) + \mathfrak{B}\, r_2(l) + \frac{\mathfrak{C}}{W} p(l) = 0,$$

$$\mathfrak{A}\int_0^l r_1(s)\, e^{i w s}\, ds + \mathfrak{B}\int_0^l r_2(s)\, e^{i w s}\, ds + \frac{\mathfrak{C}}{W}\int_0^l p(s)\, e^{i w s}\, ds = 0.$$

Hieraus folgt die Knickdeterminantengleichung

$$\begin{vmatrix} r_1(o) & r_2(0) & p(0) \\ r_1(l) & r_2(l) & p(l) \\ \int_0^l r_1(s)\, e^{i w s}\, ds & \int_0^l r_2(s)\, e^{i w s}\, ds & \int_0^l p(s)\, e^{i w s}\, ds \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man diese Determinante und beachtet, daß $p(0) = 0$ ist, so erhält man die Eigenwertgleichung

$$[r_1(0)\, r_2(l) - r_2(0)\, r_1(l)]\int_0^l p(s)\, e^{i w s}\, ds - r_1(0)\, p(l)\int_0^l r_2(s)\, e^{i w s}\, ds + r_2(0)\, p(l)\int_0^l r_1(s)\, e^{i w s}\, ds = 0. \quad (62)$$

Zur Durchführung der weiteren Rechnung werden die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \int_0^s r_1(s) \cos w s\, ds &= S_{1c}^{s,0}, & \int_0^s r_1(s) \sin w s\, ds &= S_{1s}^{s,0}, \\ \int_0^s r_2(s) \cos w s\, ds &= S_{2c}^{s,0}, & \int_0^s r_2(s) \sin w s\, ds &= S_{2s}^{s,0}. \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

eingeführt. Diese Abkürzungen der Integrale seien als Funktionen von $s$ aufgefaßt. Will man für eine dieser Funktionen einen Funktionswert für eine bestimmte Ordinate, zum Beispiel $s = l$, angeben, so sei dies durch

$$\int_0^l r_1(s) \cos w s\, ds = S_{1c}^{l,0} \quad (64)$$

angedeutet.

[1] *M. Beck*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 246.

Es ist unter Verwendung von (63)

$$p(s) = -r_1(s)\,S_{2c}^{s,0} + r_2(s)\,S_{1c}^{s,0} + i\,(r_1(s)\,S_{2s}^{s,0} - r_2(s)\,S_{2s}^{s,0})$$

und

$$\int_0^l p(s)\,e^{iws}\,ds = \int_0^l [S_{1c}^{s,0}\,r_2\cos ws + S_{1s}^{s,0}\,r_2\sin ws - S_{2c}^{s,0}\,r_1\cos ws - S_{2s}^{s,0}\,r_1\sin ws]\,ds$$
$$+ i\int_0^l [S_{1c}^{s,0}\,r_2\sin ws + S_{2s}^{s,0}\,r_1\cos ws - S_{2c}^{s,0}\,r_1\sin ws - S_{1s}^{s,0}\,r_2\cos ws]\,ds\,. \tag{65}$$

Ferner ist

$$-r_1(0)\,p(l)\int_0^l r_2(s)\,e^{iws}\,ds = -(S_{2c}^{l,0} + i\,S_{2s}^{l,0})\,r_1(0)\,[(S_{1c}^{l,0} - i\,S_{1s}^{l,0})\,r_2(l) - (S_{2c}^{l,0} - i\,S_{2s}^{l,0})\,r_1(l)]\,,$$

und das gibt

$$-r_1(0)\,p(l)\int_0^l r_2(s)\,e^{iws}\,ds = r_1(0)\,r_1(l)\,[(S_{2c}^{l,0})^2 + (S_{2s}^{l,0})^2] + r_1(0)\,r_2(l)\,[-(S_{1c}^{l,0}\,S_{2c}^{l,0} + S_{1s}^{l,0}\,S_{2s}^{l,0})$$
$$+ i\,(S_{1s}^{l,0}\,S_{2c}^{l,0} - S_{1c}^{l,0}\,S_{2s}^{l,0})]\,. \tag{66}$$

Ebenso erhält man

$$r_2(0)\,p(l)\int_0^l r_1(s)\cdot e^{iws}\,ds = (S_{1c}^{l,0} + i\,S_{1s}^{l,0})\,r_2(0)\,[r_2(l)\,(S_{1c}^{l,0} + i\,S_{1s}^{l,0}) - r_1(l)\,(S_{2c}^{l,0} - i\,S_{2s}^{l,0})]\,,$$

was bei weiterer Ausrechnung auf

$$r_2(0)\,p(l)\int_0^l r_1(s)\,e^{iws}\,ds = r_1(l)\,r_2(0)\,[-(S_{2c}^{l,0}\,S_{1c}^{l,0} + S_{2s}^{l,0}\,S_{1s}^{l,0}) + i\,(S_{2s}^{l,0}\,S_{1c}^{l,0} - S_{2c}^{l,0}\,S_{1s}^{l,0})]$$
$$+ r_2(0)\,r_2(l)\,[(S_{1c}^{l,0})^2 + (S_{1s}^{l,0})^2] \tag{67}$$

führt.

Setzt man die Ausdrücke (65) bis (67) in die Eigenwertgleichung (62) ein, so erhält man eine Bedingungsgleichung, bei der man Real- und Imaginärteil getrennt schreiben kann, und beide Teile müssen für sich zu Null werden.

Auf Grund einer leichten Rechnung läßt sich zeigen, daß der Imaginärteil identisch Null ist. Als Eigenwertgleichung für den Lagerfall *1* bleibt also der Realteil von (62) übrig. Verwendet man die weiteren Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} L(l) &= \int_0^l [S_{1c}^{s,0}\,r_2\cos ws + S_{1s}^{s,0}\,r_2\sin ws - S_{2c}^{s,0}\,r_1\cos ws - S_{2s}^{s,0}\,r_1\sin ws]\,ds\,,\\ L_{1,2}(l) &= S_{1c}^{l,0}\,S_{2c}^{l,0} + S_{1s}^{l,0}\,S_{2s}^{l,0}\,,\qquad L_1(l) = (S_{1c}^{l,0})^2 + (S_{1s}^{l,0})^2\,,\qquad L_2(l) = (S_{2c}^{l,0})^2 + (S_{2s}^{l,0})^2\,,\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

so läßt sich der Realteil schreiben als

$$r_1(0)\,r_2(l)\,[L(l) - L_{12}(l)] - r_2(0)\,r_1(l)\,[L(l) + L_{1,2}(l)] + r_1(0)\,r_1(l)\,L_2(l) + r_2(0)\,r_2(l)\,L_1(l) = 0\,, \tag{69}$$

woraus man die Verwandtschaft zur Eigenwertgleichung des Lagerfalles *2* erkennt, die einfacher, nämlich

$$r_1(0)\,r_2(l) - r_2(0)\,r_1(l) = 0\,, \tag{70}$$

lautet [vergleiche hierzu (50)].

Für den Belastungsfall $q(s) = q =$ konst. gibt die Basisgleichung gemäß (47) die Lösungen

$$r_1 = \mathfrak{z}^{1/2}\,\mathfrak{J}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,\mathfrak{z}^{3/2}\right),\qquad r_2 = \mathfrak{z}^{1/2}\,\mathfrak{J}_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,\mathfrak{z}^{3/2}\right).$$

Diese sind in (69) einzusetzen, um für diesen Fall die Eigenwerte zu errechnen.

Zur Erläuterung soll ein Zahlenbeispiel dienen. Gegeben sei $T = 10^5$ kpm, $a = 10^5$ kp m², $q = 10^3$ kp/m. Die Rechnung wird mit einer geschätzten Stablänge begonnen. Die Eigenwertgleichung (69) wird dann nicht exakt erfüllt sein, sondern man erhält für verschiedene angenommene Werte von $l$ eine Fehlerfunktion, deren erste Nullstelle man aufsuchen muß. Man findet diese durch Eingabeln. Zu dieser ersten Nullstelle gehört als Abszisse die gesuchte Stablänge $l_{krit}$.

Einen ersten Hinweis auf die zu wählende Stablänge bekommt man dadurch, daß man die Stablänge für den Lagerfall *2* bestimmt, die sich leicht finden läßt. Mit den gegebenen Werten der Aufgabe ist

$$z_l = \frac{2}{3}\,\mathfrak{z}_l^{3/2} = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{10^{10}}{4\cdot 10^{10}}\right)\left(\frac{10^5}{10^3}\right)^{2/3}\right]^{3/2} = 8{,}31\,.$$

Da für so große Werte von $z$ ohne weiteres die Näherungsformel (54) verwendet werden kann, erhält man durch diese

$$l \approx \left[\left\{\frac{12\,\pi\,10^3 \cdot 10^{10}}{10^{15}} + 1\right\}^{2/3} - 1\right] \frac{10^{10}}{4 \cdot 10^8},$$

$$l \approx [(1{,}377)^{2/3} - 1]\, 25 = 0{,}24 \cdot 25 = 6 \text{ m}\,.$$

Nun beachte man, daß für den Lagerfall *1*, wegen der größeren Zahl der Bindungen des Stabes gegenüber Lagerfall 2, die Knickfestigkeit größer wird. Dann kann man annehmen, daß auch die Knicklänge des Stabes im Lagerfall *1* größer sein wird als die Knicklänge im Lagerfall *2*. Es soll daher beim Lagerfall *1* zunächst mit $l = 10$ m gerechnet werden. Nach (43) ist

$$\alpha = \frac{10^4}{10^5} + \left(\frac{10^5}{2 \cdot 10^5}\right)^2 = 0{,}35\,, \qquad \beta = \frac{10^3}{10^5} = 0{,}01\,.$$

Damit erhält man nach (45)

$$\mathfrak{z} = \alpha\,\beta^{-2/3} - \beta^{1/3}\,s = 7{,}54 - 0{,}215\,s\,.$$

Ferner ist

$$w = \frac{c\,\tau}{2\,a} = \frac{T}{2\,a} = \frac{10^5}{2 \cdot 10^5} = 0{,}5\,.$$

Die weitere Rechnung erfolgt in Tabellenform. Die zum Teil vorgeschriebenen Integrationen werden an Hand der Tabellenwerte nach einem der gebräuchlichen Verfahren der praktischen Analysis ausgeführt. Man sehe Tabellen 1 und 2.

*Tabelle 1*

| $s =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{z} =$ | 7,540 | 7,325 | 7,110 | 6,895 | 6,680 | 6,465 | 6,250 | 6,035 | 5,820 | 5,605 | 5,390 |
| $z = 2/3\,\mathfrak{z}^{3/2} =$ | 13,87 | 13,27 | 12,62 | 12,14 | 11,47 | 10,94 | 10,41 | 9,94 | 9,34 | 8,87 | 8,34 |
| $J_{1/3}(z) =$ | 0,214 | 0,179 | 0,068 | —0,039 | —0,175 | —0,236 | —0,234 | —0,176 | —0,044 | 0,079 | 0,204 |
| $J_{-1/3}(z) =$ | 0,110 | 0,198 | 0,220 | 0,177 | 0,048 | —0,077 | —0,186 | —0,245 | —0,245 | —0,182 | —0,059 |
| $w\,s =$ | 0,0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 |
| $\cos w\,s =$ | 1,0 | 0,878 | 0,540 | 0,071 | —0,416 | —0,801 | —0,990 | —0,936 | —0,654 | —0,211 | 0,284 |
| $\sin w\,s =$ | 0,0 | 0,479 | 0,841 | 0,997 | 0,909 | 0,598 | 0,141 | —0,351 | —0,757 | —0,978 | —0,959 |
| $\mathfrak{z}^{1/2}\,J_{1/3}(z)\cos w\,s$ | 0,588 | 0,426 | 0,098 | —0,007 | 0,188 | 0,480 | 0,579 | 0,405 | 0,069 | —0,040 | 0,134 |
| $\mathfrak{z}^{1/2}\,J_{1/3}(z)\sin w\,s$ | 0,0 | 0,232 | 0,153 | —0,102 | —0,410 | —0,358 | —0,082 | 0,152 | 0,080 | —0,183 | —0,454 |
| $\mathfrak{z}^{1/2}\,J_{-1/3}(z)\cos w\,s$ | 0,303 | 0,471 | 0,317 | 0,033 | —0,052 | 0,157 | 0,460 | 0,564 | 0,386 | 0,091 | —0,039 |
| $\mathfrak{z}^{1/2}\,J_{-1/3}(z)\sin w\,s$ | 0,0 | 0,257 | 0,494 | 0,464 | 0,113 | —0,117 | —0,066 | 0,212 | 0,447 | 0,422 | 0,131 |

*Tabelle 2*

| $s =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_{1c}^{s,0} =$ | 0,0 | 0,507 | 0,769 | 0,814 | 0,905 | 1,239 | 1,769 | 2,261 | 2,498 | 2,512 | 2,559 |
| $S_{1s}^{s,0} =$ | 0,0 | 0,116 | 0,309 | 0,334 | 0,078 | —0,306 | —0,526 | —0,491 | —0,375 | —0,426 | —0,744 |
| $S_{2c}^{s,0} =$ | 0,0 | 0,387 | 0,781 | 0,956 | 0,947 | 1,000 | 1,308 | 1,820 | 2,295 | 2,534 | 2,560 |
| $S_{2s}^{s,0} =$ | 0,0 | 0,128 | 0,504 | 0,983 | 1,271 | 1,269 | 1,177 | 1,250 | 1,579 | 2,013 | 2,290 |
| $\int_0^s S_{1c}^{s,0}\,r_2 \cos w\,s\,ds =$ | 0,0 | 0,119 | 0,360 | 0,495 | 0,485 | 0,559 | 1,064 | 2,109 | 3,228 | 3,824 | 3,889 |
| $\int_0^s S_{1s}^{s,0}\,r_2 \sin w\,s\,ds =$ | 0,0 | 0,015 | 0,106 | 0,260 | 0,342 | 0,365 | 0,400 | 0,366 | 0,230 | 0,056 | —0,082 |
| $\int_0^s S_{2c}^{s,0}\,r_1 \cos w\,s\,ds =$ | 0,0 | 0,082 | 0,203 | 0,238 | 0,323 | 0,652 | 1,270 | 2,017 | 2,465 | 2,493 | 2,614 |
| $\int_0^s S_{2s}^{s,0}\,r_1 \sin w\,s\,ds =$ | 0,0 | 0,015 | 0,068 | 0,057 | —0,254 | —0,741 | —1,016 | —0,969 | —0,811 | —0,932 | —1,636 |

Mit den Werten der Tabellen errechnet man

$$r_1(0) = \mathfrak{z}_0^{1/2}\, J_{1/3}\,(13{,}87) = \sqrt{7{,}54}\cdot 0{,}214 = +\,0{,}588\,,$$

$$r_1(l) = \mathfrak{z}_l^{1/2}\, J_{1/3}\,(8{,}34) = \sqrt{5{,}39}\cdot 0{,}204 = +\,0{,}473\,,$$

$$r_2(0) = \mathfrak{z}_0^{1/2}\, J_{-1/3}\,(13{,}87) = \sqrt{7{,}54}\cdot 0{,}110 = +\,0{,}303\,,$$

$$r_2(l) = \mathfrak{z}_l^{1/2}\, J_{-1/3}\,(8{,}34) = \sqrt{5{,}39}\,(-\,0{,}059) = -\,0{,}137$$

und nach (68)

$$L(l) = 3{,}889 - 0{,}082 - 2{,}614 + 1{,}636 = +\,2{,}839\,,$$

$$L_{1,2}(l) = 2{,}559\cdot 2{,}560 - 0{,}744\cdot 2{,}290 = +\,4{,}847\,,$$

$$L_1(l) = 2{,}559^2 + 0{,}744^2 = 6{,}548 + 0{,}554 = +\,7{,}102\,,$$

$$L_2(l) = 2{,}560^2 + 2{,}290^2 = 6{,}554 + 5{,}244 = +\,11{,}798\,.$$

Die Eigenwertgleichung (69) gibt

$$-\,0{,}588\cdot 0{,}137\,(2{,}839 - 4{,}847) - 0{,}303\cdot 0{,}473\,(2{,}839 + 4{,}847)$$
$$+\,0{,}588\cdot 0{,}473\cdot 11{,}798 - 0{,}303\cdot 0{,}137\cdot 7{,}102 = +\,2{,}046\,.$$

Da sie nicht erfüllt ist, sondern den Fehler $f = +\,2{,}046$ aufweist, wird die Rechnung mit einem neuen Wert von $l$, nämlich mit $l = 8$ m, wiederholt. Es ändert sich dadurch der Wert von $\alpha$:

$$\alpha = \frac{8\cdot 10^3}{10^5} + \left(\frac{10^5}{2\cdot 10^5}\right)^2 = 0{,}08 + 0{,}25 = 0{,}32\,,$$

und es ist somit $\mathfrak{z} = 6{,}894 - 0{,}215\,s$, wogegen $\beta$ und $w$ unverändert bleiben.

Setzt man wieder ganz entsprechend wie vorher die Rechnung für $l = 8$ m in Tabellenform an, so erhält man

$$r_1(0) = -\,0{,}103\,,\qquad r_1(l) = 0{,}609\,,\qquad r_2(0) = 0{,}466\,,\qquad r_2(l) = 0{,}119\,,$$

$$S_{1c}^{l,0} = 2{,}028\,,\qquad S_{1s}^{l,0} = -\,1{,}520\,,\qquad S_{2c}^{l,0} = 1{,}627\,,\qquad S_{2s}^{l,0} = 1{,}330\,,$$

$$\int_0^l S_{1c}^{s,0}\, r_2 \cos w\, s\, ds = 3{,}463\,,\qquad \int_0^l S_{1s}^{s,0}\, r_2 \sin w\, s\, ds = -\,0{,}340\,,$$

$$\int_0^l S_{2c}^{s,0}\, r_1 \cos w\, s\, ds = 3{,}105\,,\qquad \int_0^l S_{2s}\, r_1 \sin w\, s\, ds = -\,2{,}709\,,$$

womit nach (68)

$$L(l) = +\,2{,}727,\qquad L_{1,2}(l) = +\,1{,}278\,,\qquad L_1(l) = +\,6{,}423\,,\qquad L_2(l) = +\,4{,}416$$

und nach (69)

$$-\,0{,}103\cdot 0{,}119\,(2{,}727 - 1{,}278) - 0{,}466\cdot 0{,}609\,(2{,}727 + 1{,}278)$$
$$-\,0{,}103\cdot 0{,}609\cdot 4{,}416 + 0{,}466\cdot 0{,}119\cdot 6{,}423 = -\,1{,}076$$

folgt.

Die gesuchte Knicklänge des Stabes findet man aus den beiden Fehlern der Eigenwertgleichung zu

$$l_{krit.} \approx 10 - \frac{(10-8)\,2{,}046}{2{,}046 + 1{,}076} = 10 - 1{,}311 \approx 8{,}7\ \text{m}\,.$$

(Eingegangen am 17. Februar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Math. *Horst Leipholz*, Stuttgart-Untertürkheim, Fiechtnerstr. 51.

# Die Kreiszylinderschale unter konzentrierten Belastungen*

Von K. W. Bieger

**1. Einleitung.** Die Berechnung von Kreiszylinderschalen für beliebige Oberflächenlasten wird in der Literatur im wesentlichen nach zwei Methoden behandelt.

Die erstere nach der genaueren Theorie von *Flügge*[1] erfordert die Lösung der drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für die Verschiebungsfunktionen $u$, $v$ und $w$. Zur Lösung werden hierbei meist Doppelreihen[2] herangezogen, die vor allem bei konzentrierten Belastungen zu erheblichem Rechenaufwand führen. *Koepcke*[3] löst das Problem der konzentrierten Belastungen durch Überlagerung zweier Lastfälle am unendlich langen Rohr, wobei die Kontinuität durch die Benutzung des Randstörungsproblems erzwungen wird.

Die zweite Möglichkeit ist die Vernachlässigung mehr oder weniger vieler Glieder in den Zusammenhängen zwischen Schnittlasten und Verschiebungen[4], so daß man die drei gekoppelten Differentialgleichungen auf eine einzige achter Ordnung für die Verschiebungsfunktion $w$ zurückführen kann. Es hat sich gezeigt[5], daß diese Vernachlässigungen vor allem bei konzentrierten Belastungen zum Teil unzulässige Ungenauigkeiten mit sich bringen.

In der vorliegenden Arbeit soll dargetan werden, daß es möglich ist, durch Einführung einer Lösungsfunktion, ähnlich der Spannungsfunktion bei der Berechnung der Scheiben, die drei *Flügge*schen Differentialgleichungen zu einer einzigen achter Ordnung für die Lösungsfunktion zusammenzufassen. Dadurch ist die Berechnung der Kreiszylinderschalen vor allem für konzentrierte Belastungen wesentlich vereinfacht. Die Zusammenhänge zwischen den drei Verschiebungen — und damit zwischen den Schnittkräften — und der Lösungsfunktion sind im dritten, vierten und fünften Abschnitt angegeben.

Für den Sonderfall der radialen Belastung und mit der Annahme, daß der Schalenparameter $k$ gegenüber 1 vernachlässigt werden kann, was im praktischen Gebrauch fast immer möglich ist, sind diese Zusammenhänge auch bei *Wlassow*[6] angegeben. Da jedoch *Wlassow* nicht die von *Flügge* aufgestellten Differentialgleichungen als Ausgangsbasis benutzt, ergeben sich noch einige Unterschiede, so vor allem in der Differentialgleichung der Lösungsfunktion.

An Hand des Beispiels einer radialgerichteten, im Gleichgewicht stehenden Einzellastgruppe am unendlich langen geschlossenen Rohr wird im sechsten Abschnitt gezeigt, daß dieser Lösungsweg eine explizite Darstellung der Konstanten der *Green*schen Funktion der Kreiszylinderschale ermöglicht und damit eine vereinfachte Berechnung von Einflußflächen gestattet.

**2. Grundlagen.** Es gelten die in der Schalentheorie üblichen und schon von *Flügge* angegebenen Voraussetzungen. Die Schnittlasten, Verschiebungen, Belastungen und Koordinaten sind nach Abb. 1 positiv angenommen.

Werden für die Differentialquotienten zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = f^{\cdot} \quad \text{und} \quad a\frac{\partial f}{\partial x} = f'$$

eingeführt, so ergeben sich mit den von *Flügge* aufgestellten Zusammenhängen zwischen den Schnittlasten und Verschiebungen die drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen der isotropen Kreiszylinderschale

$$u'' + \frac{1-\nu}{2}u^{\cdot\cdot} + \nu w' + \frac{1+\nu}{2}v'^{\cdot} + k\left(\frac{1-\nu}{2}u^{\cdot\cdot} - w''' + \frac{1-\nu}{2}w'^{\cdot\cdot}\right) = -X\frac{a^2}{D}, \qquad (1\,\text{a})$$

---

* Auszug aus der Dissertation des Verfassers, Einflußflächen der Kreiszylinderschalen, T. U. Berlin 1959; Berichter: Prof. Dr.-Ing. *W. Koepcke* und Prof. Dr.-Ing. *J. Szabó*.

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl., S. 150. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

[2] z. B. *Fr. Dischinger*, Beton und Eisen 1935, S. 260, oder *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 1, S. 524, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[3] *W. Koepcke*, Die Berechnung von Kreiszylinderschalen unter Flächen-, Linien- und Einzellasten, Habilitationsschrift der T. H. Berlin 1949. — *W. Koepcke*, Über kreiszylindrische Schalenträger unter Flächen-, Linien- und Einzellasten. Unveröffentlichte Arbeit zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. *Dischinger*, Berlin 1947.

[4] vgl. z. B. *K. Girkmann*, Flächentragwerke, 4. Aufl., S. 475 und S. 490, Wien 1956.

[5] vgl. auch die Dissertation des Verfassers.

[6] *W. S. Wlassow*, Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, S. 210, Berlin 1958.

$$\frac{1+\nu}{2}u'^{\cdot}+v^{:}+\frac{1-\nu}{2}v''+w^{\cdot}+k\left(\frac{3(1-\nu)}{2}v''-\frac{3-\nu}{2}w''^{\cdot}\right) \qquad =-Y\frac{a^2}{D}, \tag{1b}$$

$$\nu u'+v^{\cdot}+w+k\left(\frac{1-\nu}{2}u'^{:}-u'''-\frac{3-\nu}{2}v''^{\cdot}+w''''+2w''^{:}+w^{::}+2w^{:}+w\right)=-Z\frac{a^2}{D}. \tag{1c}$$

Hierbei ist $\nu$ die Querkontraktionszahl und

$$k=\frac{K}{D a^2}=\frac{t^2}{12 a^2}$$

der sogenannte Schalenparameter, worin

$$K=\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

die Biegesteifigkeit und

$$D=\frac{E t}{1-\nu^2}$$

die Dehnsteifigkeit der Schale bezeichnen.

Der Schalenparameter $k$ liegt für die im Bauwesen auftretenden Fälle zwischen $10^{-4}$ und $10^{-6}$ und kann daher für praktische Berechnungen gegenüber 1 vernachlässigt werden[1].

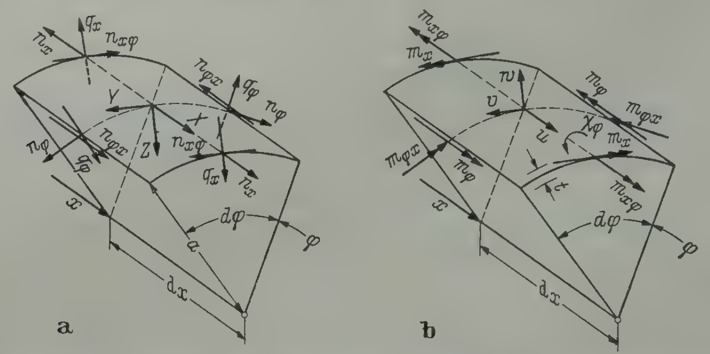


Abb. 1. Schalenelement. a) Dehnungskräfte, Querkräfte und Belastungen; b) Momente und Verschiebungen.

**3. Lösungsansatz für Lasten in Richtung der Erzeugenden.** Die drei gekoppelten Differentialgleichungen (1) lassen sich mit Hilfe der Lösungsfunktion $F(x,\varphi)$ dann am übersichtlichsten lösen, wenn die Oberflächenlasten in den drei Hauptrichtungen für sich untersucht werden. Da sich die für jede dieser Belastungen aufgestellten Differentialgleichungen für $F(x,\varphi)$ allein in den Absolutgliedern ändern, ist hierdurch nur eine geringe Mehrarbeit verbunden. Bei gleichem funktionalem Aufbau der drei Belastungsarten und der Lösungsfunktion unterscheiden sich die für die jeweilig betrachtete Lastrichtung ermittelten Funktionen $F(x,\varphi)$ nur durch eine Konstante. Die entsprechend den folgenden Angaben errechneten Verschiebungen der einzelnen Belastungszustände sind dann nur zu summieren. Zum anderen sind in der Praxis meist die Lasten in Richtung der Erzeugenden Null und die Lasten in Ringrichtung klein, so daß sie zum Teil vernachlässigt werden können.

Setzt man für Lasten in Richtung der Erzeugenden die Verschiebungen in Abhängigkeit von der noch zu bestimmenden Lösungsfunktion $F(x,\varphi)$ in folgender Form an

$$\left.\begin{aligned}
u_{(x,\varphi)}=\frac{2a^4}{(1-\nu)K}\Big\{&-kF^{:::}-2kF^{::}-\left(\frac{5-\nu}{2}+\frac{3(1-\nu)}{2}k\right)kF''^{::}-kF^{:}\\
&-[2(2-\nu)+3(1-\nu)k]\,kF''^{:}-\left[(2-\nu)+\frac{3-6\nu-\nu^2}{4}k\right]kF''''^{:}\\
&-\frac{1-\nu}{2}(1+4k+3k^2)F''-\frac{1-\nu}{2}(1+3k)\,kF''''''\Big\},\\
v_{(x,\varphi)}=\frac{2a^4}{(1-\nu)K}\Big\{&+\frac{1+\nu}{2}kF'^{::\cdot}+\frac{1+3\nu}{2}kF'^{:\cdot}+\left[(1+\nu)+\frac{3-4\nu+\nu^2}{4}k\right]kF'''^{:\cdot}\\
&+\left(\frac{1-\nu}{2}+\frac{1+\nu}{2}k\right)F'^{\cdot}+\frac{2+3\nu-\nu^2}{2}kF'''^{\cdot}+\left(\frac{1+\nu}{2}-\frac{3-\nu}{2}k\right)kF'''''^{\cdot}\Big\},\\
w_{(x,\varphi)}=\frac{a^4}{K}\Big\{&+kF'^{::}-F'^{:}+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2F'''^{:}+(1+3k)\,\nu F'''-(1-3k)\,kF'''''\Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1] Es darf jedoch nicht allgemein $k=0$ gesetzt werden.

dann ergibt sich nach Einsetzen der Verschiebungen (2) in die Gleichung (1a) die Differentialgleichung des Problems

$$
\begin{aligned}
&(1+2k-3k^2)\,F^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime}+\left(4+\frac{11-3\nu}{2}k+\frac{9(1-\nu)}{2}k^2\right)F^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime:}+\left[6+(6-3\nu)\,k-\nu^2k^2\right]F^{\prime\prime\prime\prime::}\\
&+\left(4+\frac{7-3\nu}{2}k+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2\right)F^{\prime\prime:::}+(1+k)\,F^{::::}+(2\nu+6\nu k)\,F^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime}+\left[6+3(2-\nu+\nu^2)\,k\right]F^{\prime\prime\prime\prime}\\
&+\left[8-2\nu+(7-5\nu)\,k+3(1-\nu)\,k^2\right]F^{\prime\prime::}+2(1+k)\,F^{:::}+\left[\frac{1-\nu^2}{k}+(4-3\nu^2)+3k\right]F^{\prime\prime\prime\prime}\\
&+\left(4-2\nu+\frac{7(1-\nu)}{2}k+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2\right)F^{\prime\prime:}+(1+k)\,F^{::}=+X_{(x,\varphi)}\,. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (1b) und (1c) werden durch (2) identisch erfüllt, wenn man berücksichtigt, daß wegen der Aufspaltung der Belastung für den betrachteten Fall $Y(x,\varphi)=Z(x,\varphi)=0$ zu setzen ist.

**4. Lösungsansatz für Lasten in Ringrichtung.** Für Oberflächenlasten in Ringrichtung sind die Verschiebungen folgendermaßen anzusetzen:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{(x,\varphi)}=&\frac{2a^4}{(1-\nu)K}\left\{+\frac{1+\nu}{2}k\,F^{\prime::\cdot}+\frac{1+3\nu}{2}k\,F^{\prime:\cdot}+\left[(1+\nu)+\frac{3-4\nu+\nu^2}{4}k\right]k\,F^{\prime\prime\prime:\cdot}\right.\\
&\left.+\left(\frac{1-\nu}{2}+\frac{1+\nu}{2}k\right)F^{\prime\cdot}+\frac{2+3\nu-\nu^2}{2}k\,F^{\prime\prime\prime\cdot}+\left(\frac{1+\nu}{2}-\frac{3-\nu}{2}k\right)k\,F^{\prime\prime\prime\prime\prime\cdot}\right\},\\
v_{(x,\varphi)}=&\frac{2a^4}{(1-\nu)K}\left\{-\frac{1-\nu}{2}(1+k)\,k\,F^{:::}-(1-\nu)(1+k)\,k\,F^{::}-\left[(2-\nu)+\frac{3-2\nu-\nu^2}{4}k\right]k\,F^{\prime\prime::}\right.\\
&-\frac{1-\nu}{2}(1+k)^2\,F^{:}-(2-\nu+\nu^2)\,k\,F^{\prime\prime:}-\left(\frac{5-\nu}{2}+\frac{3(1-\nu)}{2}k\right)k\,F^{\prime\prime\prime\prime:}\\
&\left.-\left[(1-\nu^2)+k\right]F^{\prime\prime}-2\nu k\,F^{\prime\prime\prime\prime}-(1-k)\,k\,F^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime}\right\},\\
w_{(x,\varphi)}=&\frac{a^4}{K}\left\{(1+k)\,F^{:\cdot}-\left(2+\frac{3-\nu}{2}k\right)k\,F^{\prime\prime:\cdot}+(2+\nu)\,F^{\prime\prime\cdot}-2k\,F^{\prime\prime\prime\prime\cdot}\right\}.
\end{aligned}
\right\}\quad(4)
$$

In diesem Fall ergibt sich die Differentialgleichung der Kreiszylinderschale aus der Gleichung (1b)

$$
\begin{aligned}
&(1+2k-3k^2)\,F^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime}+\left(4+\frac{11-3\nu}{2}k+\frac{9(1-\nu)}{2}k^2\right)F^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime:}+\left[6+(6-3\nu)\,k-\nu^2k^2\right]F^{\prime\prime\prime\prime::}\\
&+\left(4+\frac{7-3\nu}{2}k+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2\right)F^{\prime\prime:::}+(1+k)\,F^{::::}+(2\nu+6\nu k)\,F^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime}+\left[6+3(2-\nu+\nu^2)\,k\right]F^{\prime\prime\prime\prime:}\\
&+\left[8-2\nu+(7-5\nu)\,k+3(1-\nu)\,k^2\right]F^{\prime\prime::}+2(1+k)\,F^{:::}+\left[\frac{1-\nu^2}{k}+(4-3\nu^2)+3k\right]F^{\prime\prime\prime\prime}\\
&+\left(4-2\nu+\frac{7(1-\nu)}{2}k+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2\right)F^{\prime\prime:}+(1+k)\,F^{::}=+Y_{(x,\varphi)}\,, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

während die Gleichungen (1a) und (1b) wiederum identisch erfüllt sind, wenn voraussetzungsgemäß $X(x,\varphi)=Z(x,\varphi)=0$ angenommen wird.

**5. Lösungsansatz für Lasten in radialer Richtung.** Für Radialbelastungen liefern die Verschiebungen

$$
\left.
\begin{aligned}
u_{(x,\varphi)}&=\frac{a^4}{K}\left\{k\,F^{\prime::}-F^{\prime:}+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2\,F^{\prime\prime\prime:}+(1+3k)\,\nu\,F^{\prime\prime\prime}-(1+3k)\,k\,F^{\prime\prime\prime\prime\prime}\right\},\\
v_{(x,\varphi)}&=\frac{a^4}{K}\left\{(1+k)\,F^{:}-\left(2+\frac{3-\nu}{2}k\right)k\,F^{\prime\prime:\cdot}+(2+\nu)\,F^{\prime\prime\cdot}-2k\,F^{\prime\prime\prime\prime\cdot}\right\},\\
w_{(x,\varphi)}&=\frac{a^4}{K}\left\{-(1+k)\,F^{::}-\left[2+\frac{1-\nu}{2}(4+3k)\,k\right]F^{\prime\prime:}-(1+3k)\,F^{\prime\prime\prime\prime}\right\}
\end{aligned}
\right\}\quad(6)
$$

aus der Gleichung (1c) die Differentialgleichung achter Ordnung für die Lösungsfunktion $F(x,\varphi)$

$$(1+2k-3k^2)\,F'''''''' + \left(4+\frac{11-3\nu}{2}k+\frac{9(1-\nu)}{2}k^2\right)F''''''^{:} + [6+(6-3\nu)\,k-\nu^2 k^2]\,F''''^{::}$$
$$+\left(4+\frac{7-3\nu}{2}k+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2\right)F''^{:::} + (1+k)\,F^{::::} + (2\nu+6\nu k)\,F'''''' + [6+3\,(2-\nu+\nu^2)\,k]\,F''''^{:}$$
$$+[8-2\nu+(7-5\nu)\,k+3\,(1-\nu)\,k^2]\,F''^{::} + 2\,(1+k)\,F^{:::} + \left[\frac{1-\nu^2}{k}+(4-3\nu^2)+3k\right]F''''$$
$$+\left(4-2\nu+\frac{7(1-\nu)}{2}k+\frac{3(1-\nu)}{2}k^2\right)F''^{:} + (1+k)\,F^{::} = +Z(x,\varphi)\,. \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (2), (4) und (6) läßt sich ablesen, daß — wie für jeden elastischen Körper — so auch für die Kreiszylinderschale der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Lasten (*Maxwell-Betti*) gilt, sofern man noch beachtet, daß es bei dem unendlich langen geschlossenen Rohr hinsichtlich des Verschiebungszustandes des Punktes $(x,\varphi)$ nur auf die Differenz der Ordinaten dieses Punktes und des Lastangriffspunktes (also nur auf $(x-x_P)$ und $(\varphi-\varphi_P)$) ankommt[1]. Denn mit den Bemerkungen zu Abschnitt 3 folgt: Für eine Last $X=1$ in Richtung der Erzeugenden wird die Verschiebung $v(x,\varphi)$ in Ringrichtung gleich der Verschiebung in $x$-Richtung $u(x,\varphi)$ infolge einer Last $Y=1$. Es gelten somit folgende Identitäten:

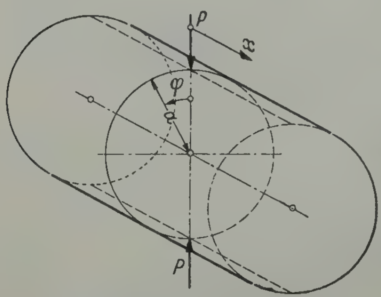

Abb. 2. Radiale Einzellastgruppe.

$$v(x,\varphi)_{X=1} = u(x,\varphi)_{Y=1}\,,$$
$$w(x,\varphi)_{X=1} = u(x,\varphi)_{Z=1}\,,$$
$$w(x,\varphi)_{Y=1} = v(x,\varphi)_{Z=1}\,.$$

**6. Beispiel für eine radiale Einzellastgruppe.** Um eine von allen Randbedingungen unabhängige Lösung für radiale Lasten auf Kreiszylinderschalen zu erhalten, wird eine im Gleichgewicht stehende Einzellastgruppe nach Abb. 2 auf das unendlich lange geschlossene Rohr aufgebracht. Aus diesem läßt sich, je nach der Art des zu untersuchenden Tragwerkes, das vorhandene Gebiet herausschneiden und mit Hilfe der bekannten Randstörungstheorien die notwendigen Randbedingungen befriedigen.

Um die interessierende Einzellastgruppe als stetige Funktion der Koordinaten $x$ und $\varphi$ darzustellen, wird diese vorerst in $\varphi$-Richtung in eine *Fourier*sche Reihe mit der Periode $2\pi$ und anschließend in $x$-Richtung in ein *Fourier*sches Integral entwickelt:

$$Z(x,\varphi) = \frac{2P}{a^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}\cos\alpha\frac{x}{a}\,d\alpha + \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\cos n\varphi\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}\cos\alpha\frac{x}{a}\,d\alpha\right). \tag{8}$$

Wird als Beispiel der zweite Summand in der geschweiften Klammer betrachtet — die Behandlung des ersten Summanden, der dem in Ringrichtung konstanten Anteil der Last entspricht, unterbleibt hier — und wird für die Lösungsfunktion der von den Veränderlichen $x$ und $\varphi$ in gleicher Weise abhängige Ansatz

$$F(x,\varphi) = \frac{2P}{a^2\pi^2}\sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\cos n\varphi\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}C_{\alpha,n}\cos\alpha\frac{x}{a}\,d\alpha \tag{9}$$

gewählt, dann folgt nach Ausführung der Differentiationen und Einsetzen in Gleichung (7), wenn man noch zur Vereinfachung $k$ gegenüber 1 vernachlässigt,

$$\frac{2P}{a^2\pi^2}\sum_n\cos n\varphi\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}C_{\alpha,n}\,CH(\alpha,n)\cos\alpha\frac{x}{a}\,d\alpha = \frac{2P}{a^2\pi^2}\sum_n\cos n\varphi\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}\cos\alpha\frac{x}{a}\,d\alpha\,. \tag{10}$$

Hierin ist

$$CH(\alpha,n) \equiv \alpha^8 + 2\,(2n^2-\nu)\,\alpha^6 + \left(6n^4-6n^2+\frac{1-\nu^2}{k}\right)^4$$
$$+ 2\,[2n^6-(4-\nu)\,n^4+(2-\nu)\,n^2]\,\alpha^2 + (n^8-2n^6+n^4) \tag{11}$$

[1] Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. *R. Trostel* bin ich für einen Hinweis bei diesen Zusammenhängen dankbar.

identisch mit der charakteristischen Gleichung der isotropen Kreiszylinderschale nach *Biezeno-Grammel*[1].

Die Gleichung (10) ist nur dann für jedes $x/a$ und $\varphi$ erfüllt, wenn

$$C_{\alpha,n} = \frac{1}{C\,H(\alpha,n)}$$

ist. Setzt man dieses Ergebnis in den Ansatz (9) ein und verfährt in gleicher Weise mit dem ersten Ausdruck der Klammer in (8), dann ist mit der Lösungsfunktion

$$F(x,\varphi) = \frac{2\,P}{a^2\,\pi^2}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\cos\alpha\,\frac{x}{a}}{C\,H\,(\alpha,0)}\,d\alpha + \sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\cos n\,\varphi\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\cos\alpha\,\frac{x}{a}}{C\,H\,(\alpha,n)}\,d\alpha\right) \tag{12}$$

unter Benutzung der Gleichungen (6) der gesamte Spannungszustand des kreiszylindrischen Rohres infolge der betrachteten Einzellastgruppe bestimmt.

Die Integrale in (12) lassen sich mittels Partialbruchzerlegung geschlossen lösen. Werden die Wurzeln[2] der charakteristischen Gleichung (11) mit

$$\alpha_{\substack{1,2\\3,4}} = \pm\,\varkappa_1 \pm i\,\mu_1 \quad\text{und}\quad \alpha_{\substack{5,6\\7,8}} = \pm\,\varkappa_2 \pm i\,\mu_2$$

bezeichnet und zur Vereinfachung

$$\xi = -\,4\,\varkappa_2\,\mu_2^2\,(\varkappa_1^4 + \mu_1^4 + 2\,\varkappa_1^2\,\mu_1^2 + 5\,\varkappa_2^4 + \mu_2^4 - 10\,\varkappa_2^2\,\mu_2^2 - 6\,\varkappa_1^2\,\varkappa_2^2 - 2\,\mu_1^2\,\mu_2^2 + 6\,\varkappa_2^2\,\mu_1^2 + 2\,\varkappa_1^2\,\mu_2^2)\,,$$

$$\psi = +\,4\,\varkappa_2^2\,\mu_2\,(\varkappa_1^4 + \mu_1^4 + 2\,\varkappa_1^2\,\mu_1^2 + \varkappa_2^4 + 5\,\mu_2^4 - 10\,\varkappa_2^2\,\mu_2^2 - 2\,\varkappa_1^2\,\varkappa_2^2 - 6\,\mu_1^2\,\mu_2^2 + 2\,\varkappa_2^2\,\mu_1^2 + 2\,\varkappa_1^2\,\mu_2^2)\,,$$

$$\gamma = -\,4\,\varkappa_1\,\mu_1^2\,(5\,\varkappa_1^4 + \mu_1^4 - 10\,\varkappa_1^2\,\mu_1^2 + \varkappa_2^4 + \mu_2^4 + 2\,\varkappa_2^2\,\mu_2^2 - 6\,\varkappa_1^2\,\varkappa_2^2 - 2\,\mu_1^2\,\mu_2^2 + 2\,\varkappa_2^2\,\mu_1^2 + 6\,\varkappa_1^2\,\mu_2^2)\,,$$

$$\delta = +\,4\,\varkappa_1^2\,\mu_1\,(\varkappa_1^4 + 5\,\mu_1^4 - 10\,\varkappa_1^2\,\mu_1^2 + \varkappa_2^4 + \mu_2^4 + 2\,\varkappa_2^2\,\mu_2^2 - 2\,\varkappa_1^2\,\varkappa_2^2 - 6\,\mu_1^2\,\mu_2^2 + 6\,\varkappa_2^2\,\mu_1^2 + 2\,\varkappa_1^2\,\mu_2^2)\,,$$

eingeführt, dann läßt sich nach einiger Zwischenrechnung die Lösungsfunktion in folgender Form angeben:

$$\begin{aligned} F(x,\varphi) = \frac{P}{a^2\,\pi}\Bigg\{ &-\frac{1}{2\,\varkappa_0^7}\,e^{-\varkappa_0\frac{x}{a}}\left(\cos\varkappa_0\frac{x}{a} + \sin\varkappa_0\frac{x}{a}\right)\\ &+ \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty}\cos u\,\varphi\left[e^{-\mu_1\frac{x}{a}}\left(\frac{2\,\delta}{\gamma^2+\delta^2}\cos\varkappa_1\frac{x}{a} - \frac{2\,\gamma}{\gamma^2+\delta^2}\sin\varkappa_1\frac{x}{a}\right)\right.\\ &\left.+ e^{-\mu_2\frac{x}{a}}\left(\frac{2\,\psi}{\xi^2+\psi^2}\cos\varkappa_2\frac{x}{a} - \frac{2\,\xi}{\xi^2+\psi^2}\sin\varkappa_2\frac{x}{a}\right)\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Hierin ist — wieder mit der Näherung $k \ll 1$ — für den in Ringrichtung konstanten Anteil der Belastung

$$\varkappa_0 = \sqrt[4]{\frac{1-\nu^2}{4\,k}}$$

zu setzen.

**7. Auswertung.**. Es läßt sich zeigen, daß für das unendlich lange geschlossene Rohr die Einflußflächen der statischen Größen für eine radiale Einzellastgruppe — bis auf das Vorzeichen bei einigen Schnittlasten und Verschiebungen — identisch mit den entsprechenden Zustandsflächen sind.

Am Lehrstuhl für Stahlbetonbau der Technischen Universität Berlin wurden auf Grund der im vorstehenden in großen Zügen angegebenen Theorie für die beiden extremen Schalenparameter $k = 10^{-4}$ und $k = 10^{-6}$ die Einflußflächen der Verschiebungen und wesentlichen Schnittlasten numerisch berechnet[3] und in Form von Höhenschichtplänen dargestellt[4] (Abb. 3 und Abb. 4). Wegen des großen Einflusses des Schalenparameters auf die Ordinatengrößen und die Gestalt der Einflußflächen ist beabsichtigt, in Kürze auch den zwischenliegenden Schalenparameter $k = 10^{-5}$ auszuwerten.

---

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, S. 528, Fußnote 2 von S. 57.

[2] Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung vgl. *F. Dischinger*, Beton und Eisen 1935, S. 263 und *J. Moe*, Abh. Int. Ver. f. Brückenb. u. Hochbau 1953, S. 283.

[3] Hierbei wurde die Querkontraktionszahl zu $\nu = 1/6$ angenommen.

[4] Diese sind in der Dissertation des Verfassers abgedruckt.

Es bereitet mit den nunmehr bekannten Einflußflächen keine Schwierigkeiten, für beliebige radiale Oberflächenlasten die statischen Größen an interessierenden Stellen zu ermitteln. Die Verschiebungen und Schnittlasten an den Rändern des aus dem unendlich langen geschlossenen Rohr herausgeschnittenen interessierenden Gebietes werden nicht mit den Randbedingungen des gegebenen Schalendaches in Einklang stehen. Sie werden jedoch längs der Ränder nach verhältnismäßig

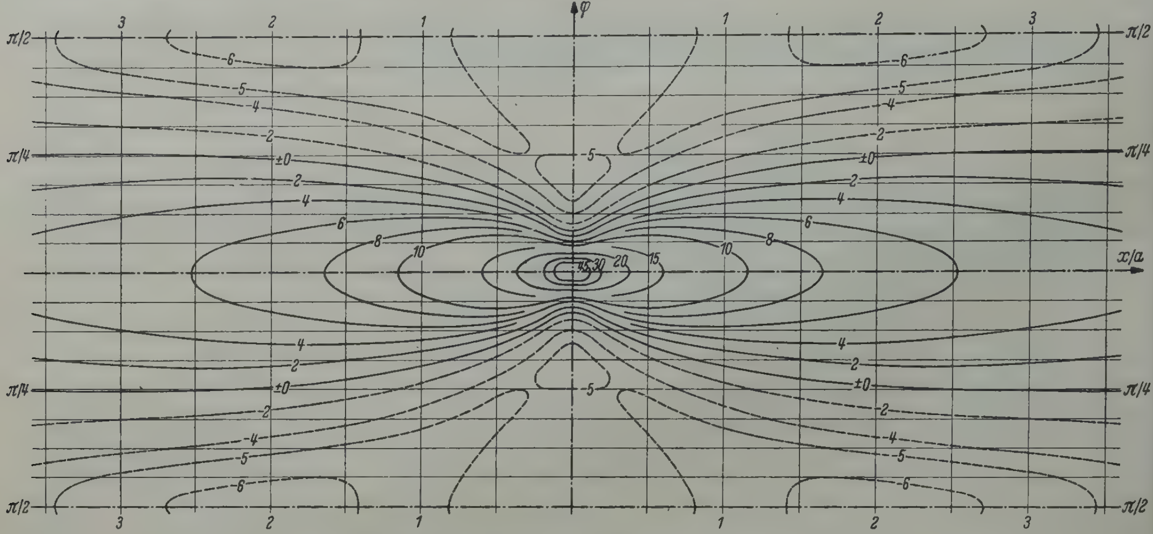


Abb. 3. Einflußfläche des Biegemomentes $m_\varphi$ (100 $\pi$-fach) $k = \frac{t^2}{12\,a^2} = 10^{-4}$.

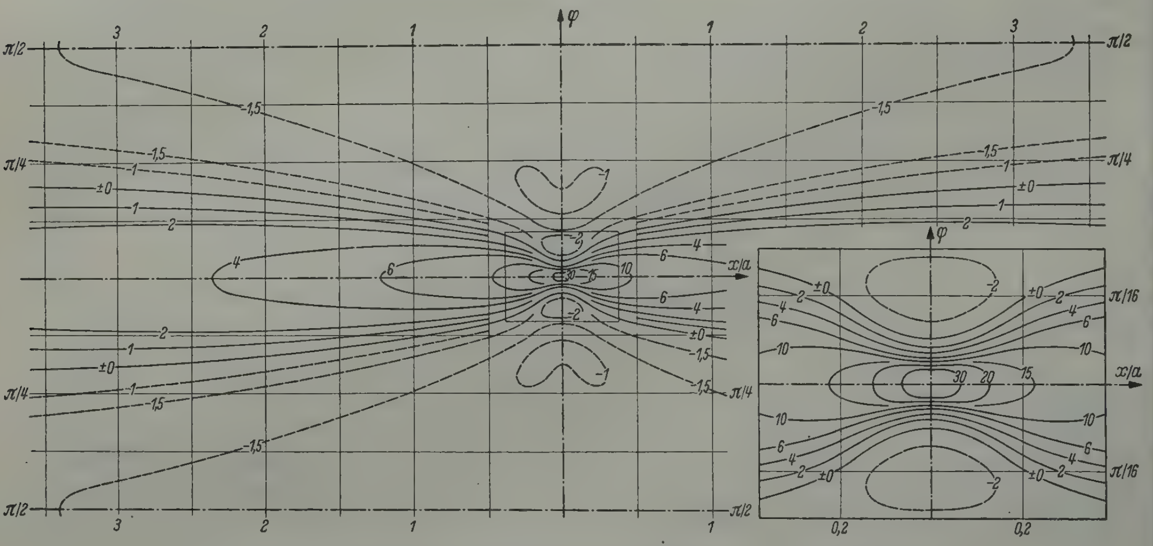


Abb. 4. Einflußfläche des Biegemomentes $m_\varphi$ (100 $\pi$-fach) $k = \frac{t^2}{12\,a^2} = 10^{-6}$.

glatten Kurven verlaufen, sofern nicht eine Einzellast in unmittelbarer Nähe eines dieser Ränder steht. Es können daher mit genügender Genauigkeit Näherungsverfahren benutzt werden, die es gestatten, an Hand von Tabellen[1] verhältnismäßig schnell die geforderten Randbedingungen zu erfüllen.

(Eingegangen am 7. März 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Klaus-Wolfgang Bieger*, Lehrstuhl für Stahlbetonbau (Prof. Dr.-Ing. *W. Koepcke*), Technische Universität Berlin, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 34

[1] *D. Rüdiger* u. *J. Urban*, Kreiszylinderschalen, Leipzig 1955; *A. Aas-Jacobsen*, Die Berechnung der Kreiszylinderschalen, Berlin 1958.

# Beanspruchung und Verformung rotierender Scheiben durch axiale Drehmomente

Von **Karl Karas**

**1. Einleitung.** Die Beanspruchung und Verformung rotierender Scheiben beliebigen Profils durch radiale Massenbeschleunigungen ist in weitem Maße durchforscht worden, während analoge Untersuchungen hinsichtlich azimutaler Massenbeschleunigungen bisher in der Literatur nur in sehr beschränktem Maße zu finden sind[1]. Dabei sind die bzgln. Fragen hinsichtlich radialer und azimutaler Massenbeschleunigungen vom theoretischen Standpunkte einander völlig gleichberechtigt zugeordnet. Wenn trotzdem die ersteren gegenüber den letzteren bisher eine so überragende Beachtung gefunden haben, so mag der Grund dafür wohl vor allem in dem Bedürfnis nach der Beherrschung des stationären Dauerbetriebszustandes gesucht werden, der natürlich für alle Turbomaschinen eine viel größere Bedeutung besitzt als der nur gelegentlich auftretende instationäre Betriebszustand mit großen azimutalen Massenbeschleunigungen. Dieser kann insbesondere durch Drehmomente bewirkt werden deren Achse mit der Drehachse der Scheibe zusammenfällt.

**2. Herleitung der Grundgleichungen.** In Abb. 1 a—c sind die Scheibenabmessungen, ein axial wirkendes Drehmoment $M_d$ mit der (konstant vorausgesetzten) Winkelbeschleunigung $\lambda = \dot{\omega}$ und die durch $M_d$ bewirkten Schnittkräfte am Scheibenelement eingezeichnet[2], wobei $\gamma$ das Einheitsgewicht, $\mu = \gamma/g$ die räumliche Dichte und $G$ den Schubmodul des Scheibenmaterials bedeuten.

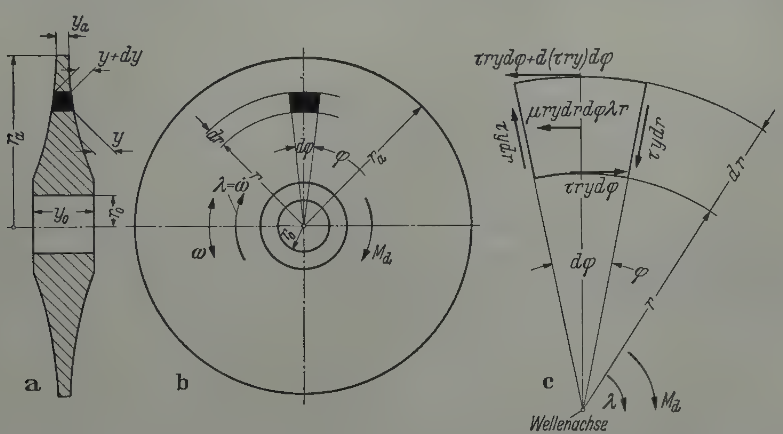


Abb. 1. a) Schnitt durch die Scheibe; b) Ansicht derselben mit durch schwarzes Feld gekennzeichnetem Scheibenelement; c) Vergrößert gezeichnetes Scheibenelement mit den durch das axiale Drehmoment bewirkten Schnitt- und Trägheitskräften.

Ist ferner $v$ die azimutale Verschiebung eines Scheibenpunktes, so gilt für den Zentriwinkel $\vartheta$ der azimutalen Verschiebung:

$$\vartheta = \frac{v}{r}. \tag{1}$$

Die Achsensymmetrie des Schubspannungszustandes bedingt die Unabhängigkeit von $\varphi$ und damit die Entkoppelung von den Gleichungen des Dehnungsspannungszustandes.

[1] Mit der vorliegenden Arbeit berühren sich die folgenden Untersuchungen von Herrn *Grammel*, denen sie auch ihre Anregung verdankt: *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 193; Ing.-Arch. 6 (1935), S. 256. Man vgl. auch: *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. 2, S. 3 und S. 29 ff., 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[2] Die Bezeichnungsweise ist dem in [1] erwähnten Werk von *C. B. Biezeno* und *R. Grammel* angeschlossen. Abb. 1 a b c entspricht den Abbn. 31 und 32 auf S. 32 des erwähnten Werkes.

Aus der Gleichgewichtsbetrachtung eines Scheibenelementes in azimutaler Richtung (Abb. 1c) ergibt sich die erste der folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{y}\frac{d(\tau y)}{dr} + 2\frac{\tau}{r} + \mu\lambda r = 0\,, \tag{2a}$$

$$\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{\tau}{G}\,, \tag{2b}$$

deren zweite den azimutalen Verschiebungszustand in bekannter Weise beschreibt. Eine der drei Funktoinen $y(r)$, $\tau(r)$ oder $v(r)$ kann gewählt werden. Gewöhnlich ist die Profilkontur gegeben. Nur bei Wahl der Verschiebungsfunktion $v(r)$ ist zur Ermittlung von $\tau(r)$ und $y(r)$ bloß eine Integration erforderlich.

Eliminiert man aus (2a, b) die Schubspannung $\tau$, so folgt für $v(r)$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right) + \frac{\mu\lambda r}{G} = 0\,, \tag{3}$$

die späterhin mehrfach zu Kontrollzwecken ausgenützt wird.

Eine etwa vom Schaufelkranz und den Schaufeln am Außenrand der Scheibe herrührende Massenbelegung $m_a$ je Längeneinheit des Randes wird wegen der geforderten Achsensymmetrie unabhängigvon $\varphi$ vorausgesetzt. Ist z. B. $r_k$ der Abstand des Schwerpunktes der Querschnittsfläche $f_k$ des Schaufelkranzes von der Wellenmitte und analog $r_s$ derjenige der Schaufelschwerpunkte, so ergibt sich mit $G_s$ als Gesamtgewicht aller Schaufeln der Länge $l$, deren Querschnitt konstant angenommen wird [1],

$$m_a = \frac{G_s}{2\pi g}\,\frac{r_s^2 + l^2/12}{r_a^2} + \mu f_k \frac{r_k^2}{r_a^2}\,. \tag{4}$$

Für das axiale Massenträgheitsmoment $T$ der Scheibe mit der linearen Massenlbelegung $m_a$ am Außenrand findet man

$$T = 2\pi m_a r_a^3 + 2\pi\mu \int_{r_0}^{r_a} r^3 y\, dr\,. \tag{5}$$

Die Übertragung des Drehmomentes $M_d$ von der Welle auf die Scheibe erfolgt an der Innenfläche $2\, r_0 \pi y_0$ derselben mittels der dort wirksamen Schubspannung $\tau(r_0) = \tau_0$. Mit $T$ in (5) gilt daher:

$$M_d = T\lambda = 2\pi r_0^2 y_0 \tau_0\,. \tag{6}$$

Gleichung (6) bietet im Zusammenhang mit (5) eine willkommene Kontrolle für $T$ und $\tau_0$. Die Größen $\tau(r)$ und $v(r)$ werden durch Integration der beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten. Dabei wird die Integrationskonstante $D$ von (2 a) durch die Forderung festgelegt, daß die Schubkraft am Scheibenaußenrand mit der Schubspannung $\tau(r_a) = \tau_a$ gleich sein muß der Massenbeschleunigung der Randmasse $m_a$:

$$\tau_a y_a = \lambda m_a r_a\,. \tag{7}$$

Die Integrationskonstante $E$ von (2b) hingegen wird durch die Befestigung der Scheibe auf der Welle bestimmt:

$$v(r_0) = v_0 = 0\,. \tag{8}$$

**3. Die sogenannten klassischen Profile.** Wie für den stationären rotativen Radialdehnungszustand lassen diese Profile auch für den instationären azimutalen Verschiebungszustand geschlossene bzw. leicht tabellierbare Lösungen zu.

a) Scheiben gleicher Dicke $y = b$.

Gleichung (2a) vereinfacht sich zu

$$\frac{d\tau}{dr} + 2\frac{\tau}{r} + \mu\lambda r = 0\,,$$

wozu man mit $D$ als Integrationskonstante die Lösung

$$\tau = \frac{D}{r^2} - \frac{\mu\lambda}{4} r^2 \tag{9}$$

[1] Der allgemeinere Fall veränderlichen Schaufelquerschnittes sowie die Berücksichtigung eventueller Bindedrähte und eines Deckbandes soll in einem anderen Zusammenhange später erörtert werden.

findet, während (2b) für die Azimutalverschiebung $v$ mit $E$ als weiterer Integrationskonstanten

$$v = -\frac{D}{2\,G\,r} - \frac{\mu\,\lambda}{8\,G}\,r^3 + E\,r \tag{10}$$

ergibt. Aus (10) erhält man leicht

$$\frac{dv}{dr} = \frac{D}{2\,G\,r^2} - \frac{3\,\mu\,\lambda}{8\,G}\,r^2 + E\,, \qquad \frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{D}{G\,r^3} - \frac{3\,\mu\,\lambda}{4\,G}\,r$$

und durch Einführung in (3)

$$-\frac{D}{G\,r^3} - \frac{3\,\mu\,\lambda}{4\,G}\,r + \frac{1}{r}\left(\frac{D}{G\,r^2} - \frac{\mu\,\lambda}{4\,G}\,r^2\right) + \frac{\mu\,\lambda}{G}\,r = 0\,,$$

wodurch die erwähnte Kontrolle der Ergebnisse (9) und (10) bewerkstelligt ist. Die Anpassung von (9) und (10) an die Randbedingungen (7) und (8) liefert für $D$ und $E$ die Werte

$$D = \lambda\,r_a^3\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu\,r_a}{4}\right), \tag{11a}$$

$$E = \frac{\lambda\,r_a^3}{2\,G\,r_0^2}\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu\,r_a}{4}\right) + \frac{\mu\,\lambda\,r_0^2}{8\,G}\,. \tag{11b}$$

Dies ergibt nun mit (9) und (10) die endgültigen Lösungen

$$\tau(r) = \lambda\left[\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu\,r_a}{4}\right)\frac{r_a^3}{r^2} - \frac{\mu\,r^2}{4}\right], \tag{12}$$

$$v(r) = \frac{\lambda\,r_a^3}{2\,G}\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu\,r_a}{4}\right)\left(\frac{r}{r_0^2} - \frac{1}{r}\right) - \frac{\mu\,\lambda}{8\,G}\,r\,(r^2 - r_0^2)\,. \tag{13}$$

Bei fehlender Ringmasse $m_a = 0$ vereinfachen sich (12) und (13) zu

$$\tau(r) = \frac{\lambda\,\mu}{4}\left(\frac{r_a^4}{r^2} - r^2\right), \tag{12a}$$

$$v(r) = \frac{\lambda\,\mu}{8\,G}\,(r^2 - r_0^2)\left(\frac{r_a^4}{r_0^2\,r} - r\right). \tag{13a}$$

Man erkennt übrigens aus (12a), daß $\tau\,(r = r_a) = \tau_a = 0$ ist, wie es bei fehlender Ringmasse $m_a = 0$ gemäß (7) sein muß. Ferner folgt nach (5) mit $y = b$

$$T = 2\,\pi\,m_a\,r_a^3 + \frac{\pi}{2}\,\mu\,b\,(r_a^4 - r_0^4)\,, \tag{14}$$

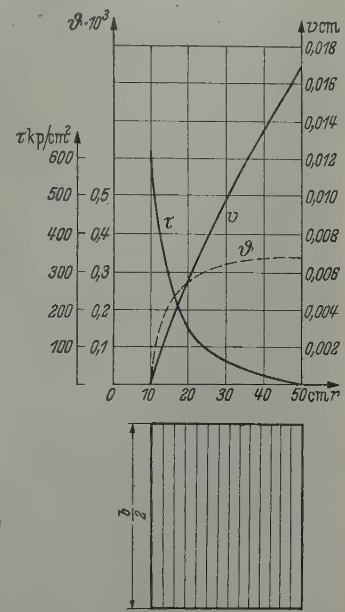


Abb. 2. Die Schubspannung $\tau$, die Azimutalverschiebung $v$ und der Azimutalwinkel $\vartheta$ für Scheiben gleicher Dicke. Unten ist der Verlauf der halben Profildicke $y/2 = b/2$ angegeben.

und man hat zur Kontrolle nach (6) mit (12) für $r = r_0$ und $y = b$

$$M_d = \left[2\,\pi\,m_a\,r_a^3 + \frac{\pi}{2}\,\mu\,b\,(r_a^4 - r_0^4)\right]\lambda = 2\,\pi\,r_0^2\,b\,\lambda\left[\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu\,r_a}{4}\right)\frac{r_a^3}{r_0^2} - \frac{\mu\,r_0^2}{4}\right]. \tag{15}$$

Die Gleichungen (12) und (13) zeigen überdies, daß sich die Funktionen $\tau(r)$ und $v(r)$ erwartungsgemäß proportional mit $\lambda$ vergrößern. Dies gilt auch für die anderen Profile.

*Zahlenbeispiel* 1: Es werde gewählt: $r_0 = 10$ cm, $r_a = 50$ cm, $\mu = 7{,}85 \cdot 10^{-6}$ kpsek²/cm⁴. $n = 4875$ $U$/min. Diese Drehschnelle soll in $t = 0{,}1$ sek durch einen axialen Drehstoß vernichtet werden. Mit $\omega = n\,\pi/30 = 510$ sek$^{-1}$ und $\lambda = \omega/t = 5100$ sek$^{-2}$ erhält man $\lambda\,\mu \doteq 4\cdot 10^{-2}$ kp/cm⁴. Schließlich erhält man mit $G = 850\,000$ kp/cm² noch $\lambda\,\mu/8\,G = 0{,}589 \cdot 10^{-8}$ cm$^{-2}$.

Es sei kein Schaufelkranz vorgesehen, somit $m_a = 0$. Damit erhält man aus den Gleichungen (12a) und (13a) die Zahlenwerte von $\tau(r)$ und $v(r)$ und aus (1) diejenigen von $\vartheta$. In Abb. 2 ist der Verlauf der Funktionen und unten der Profilverlauf wiedergegeben. Die im Gegensatze zu den folgenden Beispielen mit verjüngten Profilen großen Werte von $\tau$ in Wellennähe sind durch die großen äußeren Scheibenmassen bedingt.

b) Scheiben mit hyperbolischen Profilen; also $y = b\,r^{-n}$. Damit ergibt (2a) die Differentialgleichung

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{2-n}{r}\,\tau + \mu\,\lambda\,r = 0\,,$$

die mit $D$ als Integrationskonstanten zur Lösung

$$\tau = \frac{D}{r^{2-n}} - \frac{\mu \lambda}{4-n} r^2 \tag{16}$$

führt; sie geht für Scheiben gleicher Dicke mit $n = 0$ sofort in (9) über. Ebenso erhält man nach (16) aus (2b) mit $E$ als neuer Integrationskonstanten

$$v = -\frac{D}{(2-n) G} \frac{1}{r^{1-n}} - \frac{\mu \lambda r^3}{2(4-n) G} + E r, \tag{17}$$

woraus mit $n = 0$ sofort wieder das Ergebnis (10) für Scheiben gleicher Dicke folgt. Aus (17) gewinnt man durch Ableitung

$$\frac{dv}{dr} = \frac{D}{G} \frac{1-n}{2-n} \frac{1}{r^{2-n}} - \frac{3 \mu \lambda r^2}{2(4-n) G} + E, \qquad \frac{d^2 v}{dr^2} = -\frac{D}{G} \frac{1-n}{r^{3-n}} - \frac{3 \mu \lambda r}{(4-n) G}.$$

Hiermit ist Gleichung (3) identisch erfüllt $\left(\text{wegen } \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r} = \frac{1-n}{r}\right)$.

Mit (16) und (17) erhält man aus (7) und (8)

$$D = \lambda r_a^3 \left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu r_a^{1-n}}{4-n}\right), \tag{18a}$$

$$E = \frac{\lambda r_a^3}{(2-n) G r_0^{2-n}} \left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu r_a^{1-n}}{4-n}\right) + \frac{\mu \lambda r_0^2}{2(4-n) G} \tag{18b}$$

und somit

$$\tau(r) = \lambda \left[\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu r_a^{1-n}}{4-n}\right) \frac{r_a^3}{r^{2-n}} - \frac{\mu r^2}{4-n}\right], \tag{19}$$

$$v(r) = \frac{\lambda r_a^3}{(2-n) G} \left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu r_a^{1-n}}{4-n}\right) \left(\frac{r}{r_0^{2-n}} - \frac{1}{r^{1-n}}\right) - \frac{\mu \lambda r}{2(4-n) G} (r^2 - r_0^2). \tag{20}$$

Mit $n = 0$ gehen (18a, b) in (11a, b) und (19) bzw. (20) in (12) bzw. (13) über.

Für $n = 2$ folgt wegen

$$\lim_{n \to 2} \frac{\dfrac{r}{r_0^{2-n}} - \dfrac{1}{r^{1-n}}}{2-n} = r \ln \frac{r}{r_0}$$

sofort

$$v(r) = \frac{\lambda r_a^3}{G} \left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu}{2 r_a}\right) r \ln \frac{r}{r_0} - \frac{\mu \lambda}{4 G} r (r^2 - r_0^2). \tag{21}$$

Ferner erhält man aus (5)

$$T = 2 \pi m_a r_a^3 + \frac{2 \pi \mu}{4-n} b (r_a^{4-n} - r_0^{4-n}) \tag{22}$$

und aus (6) wegen

$$\tau_0 = \lambda \left[\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu r_a^{1-n}}{4-n}\right) \frac{r_a^3}{r_0^{2-n}} - \frac{\mu r_0^2}{4-n}\right]$$

gemäß (19)

$$M_d = 2 \pi \lambda m_a r_a^3 + \frac{2\pi}{4-n} \mu \lambda b (r_a^{4-n} - r_0^{4-n}) = 2 \pi r_0^2 b r_0^{-n} \lambda \left[\left(\frac{m_a}{b} + \frac{\mu r_a^{1-n}}{4-n}\right) \frac{r_a^3}{r_0^{2-n}} - \frac{\mu r_0^2}{4-n}\right].$$

Hier erweist man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite leicht die Identität beider Gleichungsseiten. Für $n = 0$ folgt sofort Gleichung (15).

Für $m_a = 0$ erhält man schließlich aus (19) und (20)

$$\tau(r) = \frac{\lambda \mu}{4-n} \left(\frac{r_a^{4-n}}{r^{2-n}} - r^2\right), \tag{19a}$$

$$v(r) = \frac{\lambda \mu}{(4-n) G} \left[\frac{r_a^{4-n}}{2-n} \left(\frac{r}{r_0^{2-n}} - \frac{1}{r^{1-n}}\right) - r \frac{r^2 - r_0^2}{2}\right], \tag{20a}$$

während (21) für $n = 2$ ergibt

$$v(r) = \frac{\lambda \mu r}{4 G} \left[2 r_a^2 \ln \frac{r}{r_0} - (r^2 - r_0^2)\right]. \tag{21a}$$

*Zahlenbeispiel* 2: In den folgenden Unterfällen 1), 2), 3) ist der Vorfaktor $b$ in $y = b\,r^{-n}$ jeweils so gewählt worden, daß die Scheibendicke stets $y_0 = 10$ cm ist.

1) $n = 1$; $b_1 = 100$ cm². Im übrigen seien die Annahmen wie im Beispiel 1. Man erhält $y_a = 2$ cm (mit $r_a = 50$ cm). Aus (19a und (20a) folgt speziell

$$\tau(r) = \frac{\lambda\,\mu}{3}\left(\frac{50^3}{r} - r^2\right) \qquad \text{und} \qquad v(r) = \frac{\lambda\,\mu}{3\,G}\left[50^3\left(\frac{r}{10} - 1\right) - \frac{r}{2}\,(r^2 - 100)\right].$$

2) $n = 2$; $b_2 = 1000$ cm³; $y_a = 0{,}4$ cm. Hier wird $v(r)$ nach (21a) bestimmt.

3) $n = 3$; $b_3 = 10\,000$ cm⁴; $y_a = 0{,}08$ cm. In diesem Falle werden $\tau(r)$ und $v(r)$ wieder nach (19a) und (20a) bestimmt. Der erste Term in der eckigen Klammer von (20a) bleibt trotz der Beziehung $n > 2$ positiv.

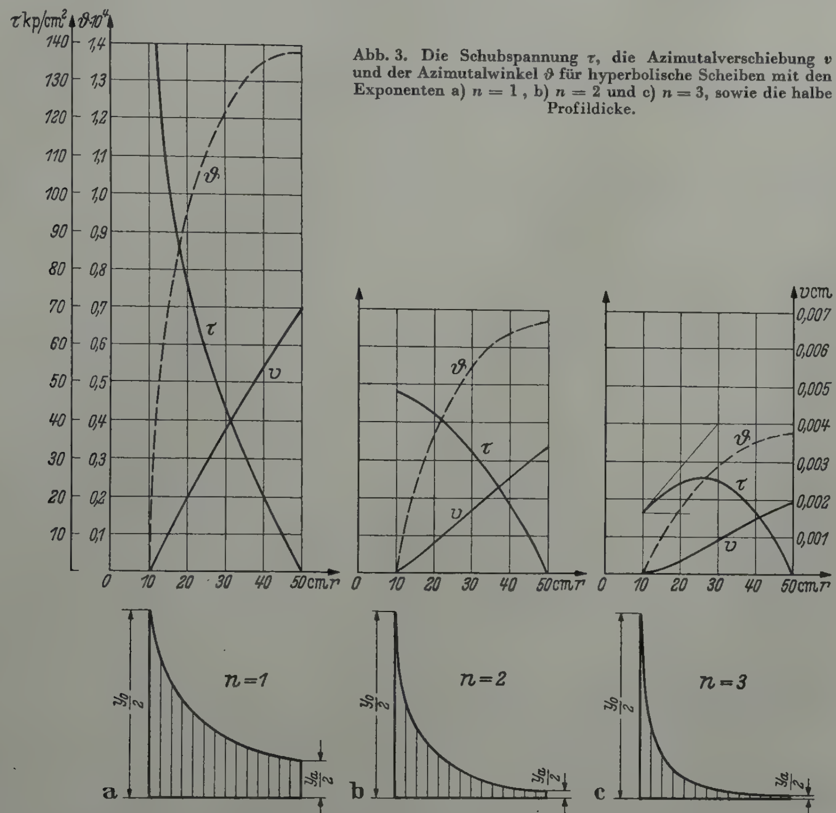


Abb. 3. Die Schubspannung $\tau$, die Azimutalverschiebung $v$ und der Azimutalwinkel $\vartheta$ für hyperbolische Scheiben mit den Exponenten a) $n = 1$, b) $n = 2$ und c) $n = 3$, sowie die halbe Profildicke.

In Abb. 3a) b) c) sind die Ergebnisse dargestellt. Die Werte der Schubspannungen $\tau$, der Verschiebung $v$ und des Winkels $\vartheta$ nehmen mit dem Betrag des Exponenten $n$ ab [1].

Die Randschubspannung $\tau_a$ kann beträchtliche Werte annehmen, wenn ein Kranz mit Schaufeln vorhanden ist. Sind z. B. in Abständen von je 5 cm Schaufeln konstanten Querschnittes von $l = 25$ cm Länge und 1 kp Gewicht vorgesehen, so folgt — bei Beibehaltung aller übrigen Konstanten des Beispieles 1 — mit $G_s = 62{,}8$ kp, $r_k = 55$ cm, $f_k = 100$ cm² und $r_s = 67{,}5$ cm aus (4) $m_a = 0{,}001414$ kp sek² cm⁻². Damit ergibt sich aus (19) für $n = 1$ und $r = r_a$ der Wert: $\tau_a = 180{,}5$ kp cm⁻². Für $n = 2$ erhält man (wegen des kleinen Wertes $y_a = 0{,}4$ cm) sogar den fünffachen Betrag, was als Kontrolle dienen mag.

Die Schubspannung $\tau(r)$ kann (man vgl. Abb. 3c) u. U. einen Extremwert annehmen. Seine Lage $r$ bestimmt man aus der durch Differentiation von (19) folgenden Gleichung:

$$\frac{m_a\,r_a^n}{b}\,(4 - n)\,(n - 2) + \mu\,r_a\left[n - 2 - 2\left(\frac{r_a}{r}\right)^{n-4}\right] = 0\,. \tag{23}$$

[1] Man kann zeigen, daß auch für $n = 4$ die Ausdrücke (19) und (20) endlich bleiben. Von der Wiedergabe dieser Ergebnisse kann aber hier abgesehen werden, da man in der Praxis kaum über $n = 2$ hinausgehen wird. Man vgl. hierzu *J. Malkin*, Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben, S. 57, Berlin 1935.

Für $m_a = 0$ folgt aus (23) die einfachere Gleichung:

$$\left(\frac{r}{r_a}\right)^{n-4} = \frac{2}{n-2}, \tag{23a}$$

die $n = 3$ und $r = r_a/2$ (Abb. 3c) in der Tat befriedigen. Für $r = r_0 = r_a/5$ folgt aus (23a)

$$5^n - 312{,}5\,(n-2) = 0$$

mit $n \approx 2{,}0929$ als Näherungslösung. Bei diesem Profil beginnt somit $\tau(r)$ bei $m_a = 0$ mit horizontaler Tangente in $r = r_0$.

c) Scheiben gleicher Dehnungsfestigkeit $\sigma_0$, also $y(r) = b\,e^{-\frac{\gamma\omega^2}{2g\sigma_0}r^2} = b\,e^{-kr^2}$. Die Einführung von $y(r)$ in (2a) ergibt nach kurzer Rechnung für $\tau(r)$

$$\frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{2}{r} - 2\,k\,r\right)\tau + \mu\,\lambda\,r = 0\,.$$

Integration ergibt [1]

$$\tau = \frac{D}{r^2}\,e^{k r^2} + \frac{\mu\lambda}{2\,k^2}\left(k + \frac{1}{r^2}\right). \tag{24}$$

Führt man nun (24) in (2b) ein, so stößt man auf das Integral [2]

$$\int \frac{e^{k r^2}}{r^3}\,dr = -\frac{e^{k r^2}}{2\,r^2} + \frac{k}{2}\,\mathrm{li}\,(e^{k r^2})\,,$$

worin li den Integral-Logarithmus bezeichnet. Schließlich folgt

$$v(r) = -\frac{D}{2\,G\,r}\,e^{k r^2} + \frac{D}{G}\,\frac{k}{2}\,r\,\mathrm{li}\,(e^{k r^2}) + \frac{\mu\lambda}{G}\,\frac{1}{2k^2}\left(k\,r\ln r - \frac{1}{2\,r}\right) + E\,r\,. \tag{25}$$

Wegen

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dr} + \frac{1}{r} = -2\,k\,r + \frac{1}{r}$$

erhält man aus

$$\frac{dv}{dr} = \frac{D}{2\,G\,r^2}\,e^{k r^2} + \frac{D}{G}\,\frac{k}{2}\,\mathrm{li}\,(e^{k r^2}) + \frac{\mu\lambda}{G}\,\frac{1}{2k^2}\left[k\,(1 + \ln r) + \frac{1}{2\,r^2}\right] + E$$

zunächst

$$\left(\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right) = -\frac{2\,D}{G}\,\frac{k}{r}\,e^{k r^2} + \frac{D}{G}\,\frac{1}{r^3}\,e^{k r^2} - \frac{\mu\lambda}{G}\,\frac{1}{2\,k\,r} + \frac{\mu\lambda}{G}\,\frac{1}{2\,k^2 r^3} - \frac{\mu\lambda}{G}\,r\,.$$

Mit

$$\frac{d^2v}{dr^2} = -\frac{D}{G\,r^3}\,e^{k r^2} + \frac{2\,D}{G}\,\frac{k}{r}\,e^{k r^2} + \frac{\mu\lambda}{G}\,\frac{1}{2\,k\,r} - \frac{\mu\lambda}{G}\,\frac{1}{2\,k^2 r^3}$$

ergibt die Einführung in (3) durch Tilgung aller Glieder die erwünschte Kontrolle.

Die Anpassung von (24) und (25) an die Randbedingungen (7), (8) ergibt für $D$ und $E$ nach längeren Rechnungen

$$D = \lambda\,r_a^2\,e^{-k r_a^2}\left[\frac{m_a r_a}{y_a} - \frac{\mu}{2\,k^2}\left(k + \frac{1}{r_a^2}\right)\right] \qquad \text{mit } y_a = b\,e^{-k r_a^2}\,, \tag{26a}$$

$$E = \frac{D}{G}\left[\frac{e^{k r_0^2}}{2\,r_0^2} - \frac{k}{2}\,\mathrm{li}\,(e^{k r_0^2})\right] - \frac{\mu\lambda}{G}\,\frac{1}{2\,k^2}\left(k\ln r_0 - \frac{1}{2\,r_0^2}\right). \tag{26b}$$

Damit erhält man aus (24) und (25)

$$\tau(r) = \lambda\left\{\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 e^{-k\,(r_a^2 - r^2)}\left[\frac{m_a r_a}{y_a} - \frac{\mu}{2\,k^2}\left(k + \frac{1}{r_a^2}\right)\right] + \frac{\mu}{2\,k^2}\left(k + \frac{1}{r^2}\right)\right\} \qquad \text{mit } y_a = b\,e^{-k r_a^2}\,, \tag{27}$$

$$v(r) = \frac{D}{2\,G}\left\{-\frac{e^{k r^2}}{r} + \frac{r}{r_0^2}\,e^{k r_0^2} - k\,r\left[\mathrm{li}\left(e^{k r_0^2}\right) - \mathrm{li}\,(e^{k r^2})\right]\right\} + \frac{\mu\lambda}{G}\left[\frac{r}{2\,k}\ln\frac{r}{r_0} + \frac{1}{4\,k^2}\left(\frac{r}{r_0^2} - \frac{1}{r}\right)\right]. \tag{28}$$

Hierin ist noch $D$ aus (26a) einzusetzen.

Ferner findet man nach (5) wegen [1]

$$\int r^3\,e^{-k r^2}\,dr = -\frac{1}{2\,k^2}\,(1 + k\,r^2)\,e^{-k r^2}\,.$$

[1] Man vgl. hierzu *W. Meyer zur Capellen*, Integraltafeln, S. 228, Nr. 1.3, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.
[2] Man vgl. hierzu *W. Meyer zur Capellen*, Integraltafeln, S. 228, Nr. 2.3 und S. 289, Nr. 3.1.

den Wert

$$T = 2\pi\, m_a\, r_a^3 + \frac{\pi\,\mu\, b}{k^2}\left[e^{-k r_0^2}(1 + k\, r_0^2) - e^{-k r_a^2}(1 + k\, r_a^2)\right]. \tag{29}$$

Geht man nun mit (27) und (29) in (6) ein, so erhält man

$$M_d = 2\pi\, m_a\, r_a^3\,\lambda + \frac{\pi\,\mu\, b\,\lambda}{k^2}\left[e^{-k r_0^2}(1 + k\, r_0^2) - e^{-k r_a^2}(1 + k\, r_a^2)\right]$$

$$= 2\pi\, r_0^2\, b\, e^{-k r_0^2}\lambda\left\{\left(\frac{r_a}{r_0}\right)^2 e^{-k(r_a^2 - r_0^2)}\left[\frac{m_a\, r_a}{b}\, e^{k r_a^2} - \frac{\mu}{2k^2}\left(k + \frac{1}{r_a^2}\right)\right] + \frac{\mu}{2k^2}\left(k + \frac{1}{r_0^2}\right)\right\}.$$

Hiermit ist die Identität erwiesen und (27) mit (29) kontrolliert.

*Zahlenbeispiel 3*: Wie bei Zahlenbeispiel 1 sei $\omega = 510\ \text{sek}^{-1}$; ferner werde $\sigma_0 = 1000\ \text{kp/cm}^2$ gewählt. Damit folgt $k = \frac{510^2 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^3} \doteq 10^{-3}\ \text{cm}^{-2}$. Die Konstante $b$ möge nun so ermittelt werden, daß $y_0 = 10$ cm sei; damit findet man $b = 10 \cdot e^{0{,}1} = 11{,}052$ cm. Dabei ergab sich $D$ gemäß (26a) mit $m_a = 0$ zu

$$D = -\frac{\lambda\,\mu}{2k^2}\, r_a^2\, e^{-k r_a^2}\left(k + \frac{1}{r_a^2}\right)$$

$$= -\frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 2500}{2 \cdot 10^{-6}}\, e^{-2{,}5}\,\frac{3{,}5}{2{,}5}\, 10^{-3} \doteq -5746\ \text{kp}.$$

Bemerkenswert ist in der zugehörigen Abb. 4 der fast geradlinige Anstieg der Azimutalverschiebung $v(r)$.

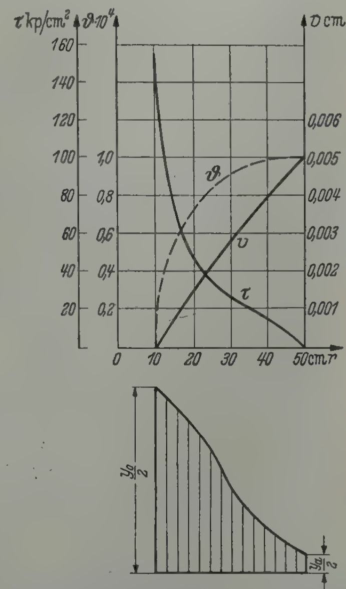


Abb. 4. Die Schubspannung $\tau$, die Azimutalverschiebung $v$ und der Azimutalwinkel $\vartheta$ für Scheiben gleicher Dehnungsfestigkeit, sowie die halbe Profildicke.

d) Konische Scheiben[1] also $y = a\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ (Abb. 5). Mit dieser Profilkontur nimmt (2a) die Form an

$$\frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{R - r}\right)\tau + \lambda\,\mu\, r = 0.$$

Hierzu findet man mit $D$ als Integrationskonstante die Lösung

$$\tau(r) = \frac{D}{r^2(R - r)} - \frac{\mu\,\lambda}{20}\, r^2\,\frac{5R - 4r}{R - r}. \tag{30}$$

Mit (30) gibt (2b) für $v(r)$ nach längerer Rechnung und mit $E$ als neue Integrationskonstante die Lösung

$$v(r) = -\frac{D}{G R^3}\left[\frac{(R - r)^2}{2r} + 2(R - r) + r \ln\left(\frac{R - r}{r}\right)\right]$$

$$-\frac{\mu\,\lambda}{20 G}\left[2r^3 - r^2 R - r R^2 \ln(R - r)\right] + E r. \tag{31}$$

Aus (31) erhält man durch doppelte Ableitungen

$$\frac{dv}{dr} = \frac{D}{G R^3}\left[\frac{R^2 - r^2}{2r^2} + 2 - \ln\left(\frac{R - r}{r}\right) + \frac{R}{R - r}\right]$$

$$-\frac{\lambda\,\mu}{20 G}\left[6r^2 - 2rR - R^2 \ln(R - r) + \frac{r R^2}{R - r}\right] + E,$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{D}{G R^3}\left[-\frac{R^2}{r^3} + \frac{R}{r(R - r)} + \frac{R}{(R - r)^2}\right]$$

$$-\frac{\lambda\,\mu}{20 G}\left[12r - 2R + \frac{R^2}{R - r} + \frac{R^3}{(R - r)^2}\right].$$

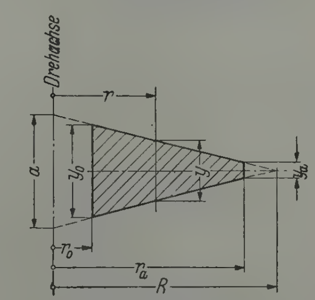


Abb. 5. Axialschnitt durch eine konische Scheibe mit den der Berechnung zugrunde gelegten Abmessungen.

Die Einführung dieser Ausdrücke in (3) befriedigt diese Gleichung. Weiter hat man durch Anpassung von (30) und (31) an die Randbedingungen (7) und (8)

$$D = \lambda\left[\frac{m_a\, r_a^3}{a}\, R + \frac{\mu}{20}\, r_a^4(5R - 4r_a)\right], \tag{32a}$$

$$E = \frac{D}{G R^3}\left[\frac{(R - r_0)^2}{2r_0^2} + 2\,\frac{R - r_0}{r_0} + \ln\left(\frac{R - r_0}{r_0}\right)\right] + \frac{\lambda\,\mu}{20 G}\left[2r_0^2 - r_0 R - R^2 \ln(R - r_0)\right]. \tag{32b}$$

[1] Man vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 19, Abb. 18. Die dortige Bezeichnung ist hier im wesentlichen übernommen worden.

Mit (32 a, b) erhält man aus (30) und (31)

$$\tau(r) = \frac{\lambda}{R-r}\left\{\frac{m_a r_a^3}{a r^2} R + \frac{\mu}{20}\left[\frac{r_a^4}{r^2}(5R-4r_a) - r^2(5R-4r)\right]\right\}, \tag{33}$$

$$v(r) = \frac{D}{G R^3}\left[\frac{(R-r_0)^2}{2 r_0^2} r - \frac{(R-r)^2}{2r} + 2\frac{(R-r_0)}{r_0} r - 2(R-r) + r \ln\left(\frac{R-r_0}{R-r}\frac{r}{r_0}\right)\right]$$
$$+ \frac{\lambda\mu}{20 G} r\left[-2(r^2-r_0^2) + R(r-r_0) - R^2 \ln\frac{R-r_0}{R-r}\right]. \tag{34}$$

Hierin ist noch für $D$ der in (32 a) ermittelte Wert einzusetzen.

Ferner ergibt sich nach Gleichung (5) als axiales Massenträgheitsmoment

$$T = 2\pi m_a r_a^3 + \frac{\pi\mu}{10}\frac{a}{R}\left[5R(r_a^4 - r_0^4) - 4(r_a^5 - r_0^5)\right]. \tag{35}$$

Beachtet man zur weiteren Kontrolle Gleichung (6), so erhält man die Identität

$$M_d = 2\pi m_a r_a^3 \lambda + \frac{\pi\mu\lambda}{10}\frac{a}{R}\left[5R(r_a^4 - r_0^4) - 4(r_a^5 - r_0^5)\right]$$
$$= 2\pi r_0^2 y_0 \tau_0 = 2\pi r_0^2 \frac{a}{R}(R - r_0)$$
$$\times \frac{\lambda}{R-r_0}\left\{\frac{m_a r_a^3 R}{a r_0^2} + \frac{\mu}{20}\left[\frac{r_a^4}{r_0^2}(5R-4r_a) - r_0^2(5R-4r_0)\right]\right\}.$$

*Zahlenbeispiel 4:* Es werde wieder $r_0 = 10$ cm, $r_a = 50$ cm, $y_0 = 10$ cm und $y_a = 2$ cm gewählt. Dann folgt gemäß Abb. 5 $a = 12$ cm, $R = 60$ cm; weiter sei $\lambda\mu = 4\cdot 10^{-2}$ kp/cm⁴ und $G = 0{,}85\cdot 10^6$ kp/cm², $m_a = 0$. Für $D$ ergab sich nach (32 a) $D = 1\,250\,000$ kpcm. In Abb. 6 sind die Funktionen $\tau(r)$, $v(r)$ und $\vartheta(r)$ dargestellt.

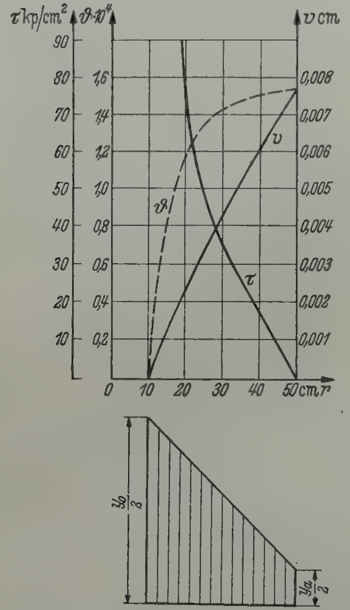


Abb. 6. Die Schubspannung $\tau$, die Azimutalverschiebung $v$ und der Azimutalwinkel $\vartheta$ für konische Scheiben, sowie die halbe Profildicke.

e) Erstes Exponentialprofil von *Malkin*, nämlich $y = b\,e^{-\beta r^{4/3}}$. Die Einführung dieser Profilkurve in Gleichung (2 a) liefert die Differentialgleichung

$$\frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{2}{r} - \frac{4}{3}\beta r^{1/3}\right)\tau + \mu\lambda r = 0,$$

die die Lösung hat

$$\tau(r) = \frac{D}{r^2} e^{\beta r^{4/3}} + \frac{3\lambda\mu}{4\beta^3}\left(\beta^2 r^{2/3} + 2\beta r^{-2/3} + 2 r^{-2}\right). \tag{36}$$

Mit (36) findet man aus (2b) nach längerer Rechnung für die azimutale Verschiebung $v(r)$ mit $E$ als neuer Integrationskonstanten

$$v(r) = \frac{D}{G} r \int \frac{e^{\beta r^{4/3}}}{r^3} dr + \frac{3\lambda\mu}{4 G \beta^3}\left(\frac{3}{2}\beta^2 r^{5/3} - 3\beta r^{1/3} - r^{-1}\right) + E r. \tag{37}$$

Das in (37) noch enthaltene unbestimmte Integral kann durch die Substitution

$$r = \frac{u^{3/2}}{\beta^{3/4}},$$

somit

$$dr = \frac{3}{2}\frac{u^{1/2}}{\beta^{3/4}} du, \qquad \beta r^{4/3} = u^2, \qquad \frac{du}{dr} = \frac{2}{3}\beta^{1/2} r^{-1/3} \tag{38}$$

transformiert werden in

$$\int \frac{e^{\beta r^{4/3}}}{r^3} dr = \int \frac{\beta^{9/4}}{u^{9/2}} e^{u^2} \frac{3}{2}\frac{u^{1/2}}{\beta^{3/4}} du = \frac{3}{2}\beta^{3/2}\int \frac{e^{u^2}}{u^4} du = \frac{3}{2}\beta^{3/2} J_1. \tag{39}$$

Man kennt das unbestimmte Integral $J_1$; es soll in $u$ ausgedrückt werden:[1]

$$J_1 = \frac{4}{3} \int e^{u^2}\, du - \frac{1}{3\,u}\, e^{u^2} \left(2 + \frac{1}{u^2}\right). \tag{40}$$

Durch Ableitung von (37) nach $r$, wobei man (38) und (40) beachten muß, folgt

$$\frac{dv}{dr} = \frac{3}{2}\,\frac{D}{G}\,\beta^{3/2} \left\{\left[\frac{4}{3} \int e^{u^2}\, du - \frac{1}{3\,u}\, e^{u^2} \left(2 + \frac{1}{u^2}\right)\right] + r\,\frac{dJ_1}{du}\,\frac{du}{dr}\right\} + \frac{3\,\lambda\,\mu}{4\,G\,\beta^3} \left(\frac{5}{2}\,\beta^2\, r^{2/3} - \beta\, r^{-2/3} + r^{-2}\right) + E,$$

worin

$$r\,\frac{dJ_1}{du}\,\frac{du}{dr} = \frac{2}{3}\,\beta^{-3/2}\,\frac{1}{r^2}\, e^{\beta\, r^{4/3}}$$

ist. Nochmalige Ableitung dieser Gleichung nach $r$ ergibt wegen

$$\frac{d}{dr}\left[e^{u^2}\,\frac{1}{3\,u}\left(2 + \frac{1}{u^2}\right)\right] = e^{u^2}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{u^4}\right)\frac{du}{dr}$$

mit Beachtung von (38) nach längerer Rechnung

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{D}{G}\, e^{\beta\, r^{4/3}} \left(\frac{4}{3}\,\beta\, r^{-5/3} - r^{-3}\right) + \frac{\lambda\,\mu}{\beta^3\, G}\left(\frac{5}{4}\,\beta^2\, r^{-1/3} + \frac{1}{2}\,\beta\, r^{-5/3} - \frac{3}{2}\, r^{-3}\right),$$

während man für $\left(\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right)$ denselben Ausdruck mit umgekehrtem Vorzeichen vermehrt um $-\lambda\,\mu\, r/G$ erhält, so daß man erkennt, daß die Gleichung (3) befriedigt und somit die erstrebte Kontrolle erhalten worden ist. Die Anpassung von (36) und (37) an die Randbedingungen (7) und (8) ergibt weiterhin

$$D = \lambda\left[\frac{m_a\, r_a^3}{b} - \frac{3\,\mu}{4\,\beta^3}\,(\beta^2\, r_a^{8/3} + 2\,\beta\, r_a^{4/3} + 2)\, e^{-\beta\, r_a^{4/3}}\right], \tag{41a}$$

$$E = -\frac{3}{2}\,\frac{D}{G}\,\beta^{3/2}\, J_1(u_0) - \frac{3\,\lambda\,\mu}{4\,G\,\beta^3}\left(\frac{3}{2}\,\beta^2\, r_0^{2/3} - 3\,\beta\, r_0^{-2/3} - r_0^{-2}\right), \tag{41b}$$

worin noch $D$ aus (41 a) einzusetzen und $J_1(u_0) = J_1(\beta^{1/2}\, r_0^{2/3})$ ein reiner Zahlenwert ist. Mit (41 a, b) erhält man aus (36) und (37)

$$\tau(r) = \lambda\left\{\frac{m_a\, r_a^3}{b}\,\frac{1}{r^2}\, e^{\beta\, r^{4/3}} - \frac{3\,\mu}{4\,\beta^3}\left[\frac{1}{r^2}\,(\beta^2\, r_a^{8/3} + 2\,\beta\, r_a^{4/3} + 2)\, e^{-\beta\,(r_a^{4/3} - r^{4/3})} - (\beta^2\, r^{2/3} + 2\,\beta\, r^{-2/3} + 2\, r^{-2})\right]\right\}, \tag{42}$$

$$v(r) = \frac{3}{2}\,\frac{D}{G}\,\beta^{3/2}\, r\,[J_1(u) - J_1(u_0)] + \frac{3\,\lambda\,\mu}{4\,G\,\beta^3}\, r\left[\frac{3}{2}\,\beta^2\,(r^{2/3} - r_0^{2/3}) - 3\,\beta\,(r^{-2/3} - r_0^{-2/3}) - (r^{-2} - r_0^{-2})\right]. \tag{43}$$

In (43) ist noch $D$ aus (41 a) einzusetzen.

Ferner folgt aus (5)[1]:

$$T = 2\,\pi\, m_a\, r_a^3 - \frac{3}{2}\,\pi\,\frac{b\,\mu}{\beta^3}\,[(\beta^2\, r_a^{8/3} + 2\,\beta\, r_a^{4/3} + 2)\, e^{-\beta\, r_a^{4/3}} - (\beta^2\, r_0^{8/3} + 2\,\beta\, r_0^{4/3} + 2)\, e^{-\beta\, r_0^{4/3}}]. \tag{44}$$

Geht man mit (42) für $r = r_0$ und $y_0 = b\, e^{-\beta\, r_0^{4/3}}$ und mit (44) in (6) ein, so erhält man als weitere Kontrolle die Identität

$$\begin{aligned} M_d &= \lambda\left\{2\,\pi\, m_a\, r_a^3 - \frac{3}{2}\,\pi\,\frac{b\,\mu}{\beta^3}\,[(\beta^2\, r_a^{8/3} + 2\,\beta\, r_a^{4/3} + 2)\, e^{-\beta\, r_a^{4/3}} - (\beta^2\, r_0^{8/3} + 2\,\beta\, r_0^{4/3} + 2)\, e^{-\beta\, r_0^{4/3}}]\right\} \\ &= 2\,\pi\, r_0^2\, b\, e^{-\beta\, r_0^{4/3}}\,\lambda\left\{\frac{m_a\, r_a^3}{b\, r_0^2}\, e^{\beta\, r_0^{4/3}} - \frac{3}{4}\,\frac{\mu}{\beta^3}\left[\frac{1}{r_0^2}\,(\beta^2\, r_a^{8/3} + 2\,\beta\, r_a^{4/3} + 2)\, e^{-\beta\,(r_a^{4/3} - r_0^{4/3})}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - (\beta^2\, r_0^{2/3} + 2\,\beta\, r_0^{-2/3} + 2\, r_0^{-2})\right]\right\}. \end{aligned}$$

Zu bemerken ist noch, daß in (44) der Ausdruck in der eckigen Klammer des zweiten Termes negativ ist, so daß der zweite Summand in (44) positiv ist. Ähnlich den hyperbolischen Profilen wird die Konstante $\beta$ vom Verhältnis der Scheibendicken $y_0$ und $y_a$ gemäß der Formel[2]

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{y_0}{y_a}\right)}{r_a^{4/3} - r_0^{4/3}} \tag{45}$$

[1] Man vgl. *W. Meyer zur Capellen*, Integr ltafeln, S. 228, Nr. 4.2.4. Dort ist allerdings irrtümlich ein neunmal zu großer Ausdruck angegeben. Für das bei der Berechnung von $T$ in (44) auftretende Integral $\int w^2\, e^{-w}\, dw$ vgl. man *W. Meyer zur Capellen* a. a. O. S. 224 Nr. 4.1.1.2 mit $k = -1$.

[2] Man vgl. *J. Malkin* a. a. O. S. 71 Gl. (86).

bestimmt, die sich sofort aus der Gleichung der Profilkontur ergibt, während sich die Konstante $b$ nach Wahl von $\beta$ durch die Forderung einer bestimmten Profildicke z. B. $y_0$ ermitteln läßt.

*Zahlenbeispiel 5*: Wie bei den früheren Beispielen sei $r_0 = y_0 = 10$ cm, $r_a = 50$ cm, $y_a \approx 2$ cm; $\lambda\,\mu = 4{,}10^{-2}$ kp/cm$^4$, $G = 0{,}85 \cdot 10^6$ kp/cm$^2$; dann erhält man aus (45)

$$\beta = \frac{\ln 5}{50^{4/3} - 10^{4/3}} = \frac{1{,}60944}{162{,}656} \doteq 0{,}01 \qquad \text{und} \qquad b = y_0\, e^{+\,0{,}01\,\cdot\,10^{4/3}} = 12{,}40407 \text{ cm}\,.$$

Damit findet man die in der zweiten Spalte der Tabelle 1 (linke Hälfte) angegebenen Werte der Funktion $y(r)$. Ferner erhält man für den Ausdruck in der runden Klammer von (41 a) den Zahlenwert

$$A_1 = \beta^2\, r_a^{8/3} + 2\,\beta\, r_a^{4/3} + 2 = 9{,}076964$$

und damit aus (41 a) mit $m_a = 0$, $D = -43160{,}9638$ kp.
Mit $m_a = 0$ verschwindet in (42) der erste Summand. Bezeichnet man dann innerhalb der eckigen Klammer die mit der $e$-Potenz behaftete Funktion in (42) mit $\tau_1(r)$ und den letzten Summanden mit $\tau_2(r)$, so findet man ihre Zahlenwerte in der dritten und vierten Spalte, ihre Summe $\tau(r)$ aber — multipliziert mit dem Faktor $-3\,\mu\,\lambda/4\,\beta^3 = -30000$ kp — in der fünften Spalte der linken Hälfte der Tabelle 1.
Analog enthält die rechte Hälfte dieser Tabelle in der ersten Spalte die gemäß (38) bestimmten Werte von $u$, in der zweiten und dritten Spalte wieder die beiden Teilsummanden $v_1(r)$ und $v_2(r)$ von (43), während die vierte Spalte deren Summe $v(r)$ und schließlich die fünfte Spalte den Torsionswinkel $\vartheta$ nach (1) enthält.[1]

*Tabelle 1*

| $r$ cm | $y$ cm | $\tau_1(r)$ in (42) | $\tau_2(r)$ in (42) | $\tau(r)$ kp/cm$^2$ | $u$ | $v_1(r)$ in (43) | $v_2(r)$ in (43) | $v(r)$ cm | $\vartheta \cdot 10^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 0,017846 | −0,024773 | 207,825 | 0,4642 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 7,207 | 0,006191 | −0,008451 | 67,818 | 0,7368 | −0,005259 | 0,007271 | 0,002012 | 1,006 |
| 30 | 4,883 | 0,004060 | −0,005259 | 35,967 | 0,9655 | −0,010018 | 0,013761 | 0,003744 | 1,248 |
| 40 | 3,158 | 0,003532 | −0,004130 | 17,934 | 1,1696 | −0,014871 | 0,020233 | 0,005361 | 1,340 |
| 50 | 1,966 | 0,003631 | −0,003631 | 0 | 1,3572 | −0,019983 | 0,026810 | 0,006827 | 1,365 |

*Tabelle 2*

| $r$ cm | $y$ cm | $\tau_1(r)$ in (52) | $\tau_2(r)$ in (52) | $\tau(r)$ kp/cm$^2$ | $u$ | $v_1(r)$ in (53) | $v_2(r)$ in (53) | $v(r)$ cm | $\vartheta \cdot 10^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 3,337002 | −3,824607 | 119,834 | 1,1604 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 5,058 | 1,649030 | −1,870984 | 54,547 | 1,8420 | −0,009355 | 0,010691 | 0,001336 | 0,668 |
| 30 | 2,853 | 1,299388 | −1,435674 | 33,494 | 2,4137 | −0,019123 | 0,021757 | 0,002634 | 0,878 |
| 40 | 1,714 | 1,216814 | −1,289451 | 17,851 | 2,9240 | −0,029646 | 0,033512 | 0,003866 | 0,966 |
| 50 | 1,072 | 1,244628 | −1,244631 | 0 | 3,3930 | −0,040978 | 0,045962 | 0,004984 | 0,997 |

Es ist also

$$\left.\begin{aligned} \tau_1(r) &= \frac{A_1}{r^2}\, e^{-\beta\,(r_a^{4/3} - r^{4/3})}\,, \\ \tau_2(r) &= -(\beta^2\, r^{2/3} + 2\,\beta\, r^{-2/3} + 2\, r^{-2})\,, \end{aligned}\right\} \quad \tau(r) = -\frac{3\,\mu\,\lambda}{4\,\beta^3}\,[\tau_1(r) + \tau_2(r)]\,.$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(r) &= \frac{3}{2}\,\frac{D}{G}\,\beta^{3/2}\, r\,[J_1(u) - J_1(u_0)]\,, \\ v_2(r) &= \frac{3\,\lambda\,\mu}{4\,G\,\beta^3}\, r \left[\frac{3}{2}\,\beta^2\,(r^{2/3} - r_0^{2/3}) - 3\,\beta\,(r^{-2/3} - r_0^{-2/3}) - (r^{-2} - r_0^{-2})\right], \end{aligned}\right\} \quad v(r) = v_1(r) + v_2(r)\,.$$

[1] Zur Auswertung der in $J_1$ enthaltenden Funktion $\int e^{u^2}\, du$ konnten mit Vorteil die Funktionentafeln von Jahnke-Emde, S. 106, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1933, für den Integral-Logarithmus in (28) (Zahlenbeispiel 3), sowie in (50) (Zahlenbeispiel 6) ebendort S. 83 bis 86, aber auch *F. Tölke*, Praktische Funktionenlehre, S. 248 bis 257, Berlin 1943 verwendet werden. Für die oftmals gebrauchten Funktionen $e^x$ bzw. $e^{-x}$ wurden die „Fünfstelligen Tafeln" von *K. Hayashi*, Berlin 1944, und schließlich für die mehrfach auftretende Funktion $x^{2/3}$ die „Fünfstelligen Funktionstafeln", von *K. Hayashi* S. 106—110, Berlin 1930 benutzt.

Die so gewonnenen Endergebnisse sind in Abb. 7 durch Schaulinien mittels der beigefügten Maßstäbe dargestellt worden.

f) Zweites Exponentialprofil von *Malkin*, nämlich $y = b\, e^{-\beta r^{2/3}}$.
Die Einführung dieser Profilkurve in Gleichung (2a) ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{d\tau}{dr} + \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{3}\beta r^{-1/3}\right)\tau + \mu\lambda r = 0\,,$$

die mit $D$ als Integrationskonstante nach längerer Rechnung die Lösung

$$\tau(r) = \frac{D}{r^2} e^{\beta r^{2/3}} + \frac{3\lambda\mu}{2\beta^6}\left(\beta^5 r^{4/3} + 5\beta^4 r^{2/3} + 20\beta^3 + 60\beta^2 r^{-2/3} + 120\beta r^{-4/3} + 120 r^{-2}\right) \qquad (46)$$

liefert. Führt man nun (46) in (2b) ein, so erhält man mit $E$ als weiterer Integrationskonstanten

$$v(r) = \frac{D}{G} r \int \frac{e^{\beta r^{2/3}}}{r^3} dr + \frac{3\lambda\mu}{2G\beta^6}\left(\frac{3}{4}\beta^5 r^{7/3} + \frac{15}{2}\beta^4 r^{5/3} + 20\beta^3 r \ln r - 90\beta^2 r^{1/3} - 90\beta r^{-1/3} - 60 r^{-1}\right) + E r\,. \qquad (47)$$

Das in (47) noch enthaltene unbestimmte Integral kann durch die Substitution

$$r = \left(\frac{u}{\beta}\right)^{3/2},$$

somit

$$dr = \frac{3}{2\beta^{3/2}} u^{1/2}\, du\,, \qquad \frac{du}{dr} = \frac{2}{3}\beta r^{-1/3}\,, \qquad u = \beta r^{2/3} \qquad (48)$$

transformiert werden in

$$\int \frac{e^{\beta r^{2/3}}}{r^3} dr = \frac{3}{2}\beta^3 \int \frac{e^u}{u^4} du = \frac{3}{2}\beta^3 J_2\,, \qquad (49)$$

worin[1]

$$J_2 = -\frac{e^u}{6u^3}(2 + u + u^2) + \frac{1}{6}\,\mathrm{li}\,(e^u)\,. \qquad (50)$$

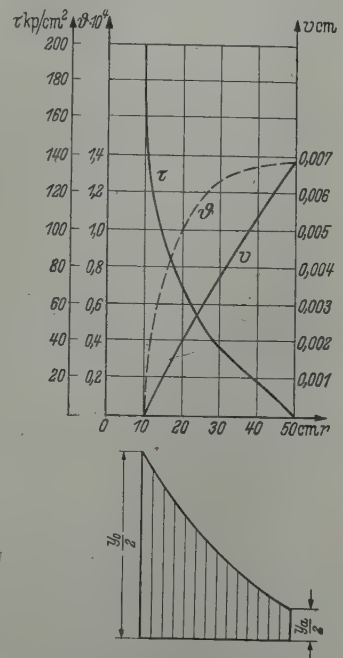


Abb. 7. Die Schubspannung $\tau$, die Azimutalverschiebung $v$ und der Azimutalwinkel $\vartheta$ gemäß Tabelle 1 für das erste Exponentialprofil sowie die halbe Profildicke.

Beachtet man (49) und (50), so erhält man durch Ableitung von (47) nach $r$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{3}{2}\frac{D}{G}\beta^3\left[-\frac{e^u}{6u^3}(2 + u + u^2) + \frac{1}{6}\,\mathrm{li}\,(e^u) + r\frac{e^u}{u^4}\frac{du}{dr}\right]$$
$$+ \frac{3\lambda\mu}{2G\beta^6}\left(\frac{7}{4}\beta^5 r^{4/3} + \frac{25}{2}\beta^4 r^{2/3} + 20\beta^3(1 + \ln r) - 30\beta^2 r^{-2/3} + 30\beta r^{-4/3} + 60 r^{-2}\right) + E,$$

worin $u$ durch (48) erklärt ist. Nochmalige Ableitung dieser Gleichung nach $r$ und entsprechende Zusammenziehung der Glieder ergibt

$$\frac{d^2v}{dr^2} = \frac{D}{G} e^{\beta r^{2/3}}\left(\frac{2}{3}\beta r^{-7/3} - r^{-3}\right)$$
$$+ \frac{3\lambda\mu}{2G\beta^6}\left(\frac{7}{3}\beta^5 r^{1/3} + \frac{25}{3}\beta^4 r^{-1/3} + 20\beta^3 r^{-1} + 20\beta^2 r^{-5/3} - 40\beta r^{-7/3} - 120 r^{-3}\right),$$

wogegen man für $\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right)$ denselben Ausdruck, jedoch mit verkehrten Vorzeichen und außerdem noch vermehrt um $-\lambda\mu r/G$ erhält, so daß man nach Einführung dieser Ausdrücke in (3) erkennt, daß diese Gleichung identisch befriedigt ist.

Unterwirft man die Lösung (46) der Randbedingung (7), so gewinnt man

$$D = \lambda\left[\frac{m_a r_a^3}{b} - \frac{3\mu}{2\beta^6}\left(\beta^5 r_a^{10/3} + 5\beta^4 r_a^{8/3} + 20\beta^3 r_a^2 + 60\beta^2 r_a^{4/3} + 120\beta r_a^{2/3} + 120\right)\cdot e^{-\beta r_a^{2/3}}\right]. \qquad (51\,a)$$

[1] *W. Meyer zur Capellen*, a. a. O. S. 225, Nr. 2.1.4. mit der Erklärung von $\overline{Ei}(x)$ auf S. 289 Nr. 3.1.

Unterwirft man analog die Lösung (47) der Randbedingung (8), so ergibt sich

$$E = -\frac{D}{G}\,\frac{3}{2}\,\beta^3\,J_2(u_0) - \frac{3\,\lambda\,\mu}{2\,G\,\beta^6}\left(\frac{3}{4}\,\beta^5\,r_0^{4/3} + \frac{15}{2}\beta^4\,r_0^{2/3} + 20\,\beta^3 \ln r_0 - 90\,\beta^2\,r_0^{-2/3} - 90\,\beta\,r_0^{-4/3} - 60\,r_0^{-2}\right). \tag{51b}$$

Führt man (51a) in (46) ein, so erhält man für die Schubspannungsfunktion $\tau(r)$

$$\tau(r) = \lambda\left\{\frac{m_a\,r_a^3}{b}\,\frac{1}{r^2}\,e^{\beta\,r^{2/3}} - \frac{3\,\mu}{2\,\beta^6}\left[\frac{1}{r^2}\,(\beta^5\,r_a^{10/3} + 5\,\beta^4\,r_a^{8/3} + 20\,\beta^3\,r_a^2 + 60\,\beta^2\,r_a^{4/3} + 120\,\beta\,r_a^{2/3} + 120)\,e^{-\beta\,(r_a^{2/3} - r^{2/3})}\right.\right.$$
$$\left.\left. - (\beta^5\,r^{4/3} + 5\,\beta^4\,r^{2/3} + 20\,\beta^3 + 60\,\beta^2\,r^{-2/3} + 120\,\beta\,r^{-4/3} + 120\,r^{-2})\right]\right\}. \tag{52}$$

Die Einführung von (51b) in (47) ergibt mit Beachtung von (49)

$$v(r) = \frac{D}{G}\,\frac{3}{2}\,\beta^3\,r\,[J_2(u) - J_2(u_0)] + \frac{3\,\lambda\,\mu}{2\,G\,\beta^6}\,r\left[\frac{3}{4}\,\beta^5\,(r^{4/3} - r_0^{4/3}) + \frac{15}{2}\,\beta^4\,(r^{2/3} - r_0^{2/3}) + 20\,\beta^3 \ln\frac{r}{r_0}\right.$$
$$\left. - 90\,\beta^2\,(r^{-2/3} - r_0^{-2/3}) - 90\,\beta\,(r^{-4/3} - r_0^{-4/3}) - 60\,(r^{-2} - r_0^{-2})\right]. \tag{53}$$

Hierin ist noch für $D$ der Wert (51a) einzusetzen, was der Übersichtlichkeit wegen unterbleiben möge. $u$ bzw. $u_0$ bedeutet den Wert der Funktion $u(r)$ für $r$ bzw. $r_0$.

Ferner erhält man für das Massenträgheitsmoment gemäß Gleichung (5)

$$T = 2\,\pi\,m_a\,\tau_a^3 + 2\,\pi\,\mu\,b\int_{r_0}^{r_a} r^3\,e^{-\beta\,r^{2/3}}\,dr = 2\,\pi\,m_a\,r_a^3 + \frac{3\,\pi\,b\,\mu}{\beta^6}\int u^5\,e^{-u}\,du\Big]_{r_0}^{r_a}.$$

Man findet für das unbestimmte Integral

$$\int u^5\,e^{-u}\,du = -(u^5 + 5\,u^4 + 20\,u^3 + 60\,u^2 + 120\,u + 120)\,e^{-u}.$$

Somit folgt mit Beachtung von (48)

$$T = 2\,\pi\,m_a\,r_a^3 - \frac{3\,\pi\,b\,\mu}{\beta^6}\left[(\beta^5\,r_a^{10/3} + 5\,\beta^4\,r_a^{8/3} + 20\,\beta^3\,r_a^2 + 60\,\beta^2\,r_a^{4/3} + 120\,\beta\,r_a^{2/3} + 120)\,e^{-\beta\,r_a^{2/3}}\right.$$
$$\left. - (\beta^5\,r_0^{10/3} + 5\,\beta^4\,r_0^{8/3} + 20\,\beta^3\,r_0^2 + 60\,\beta^2\,r_0^{4/3} + 120\,\beta\,r_0^{2/3} + 120)\,e^{-\beta\,r_0^{2/3}}\right]. \tag{54}$$

Führt man nun in (52) $r = r_0$ ein und geht mit dem erhaltenen Ergebnis und mit $y_0 = b\,e^{-\beta\,r_0^{2/3}}$ in Gleichung (6) ein, so erhält man zur Kontrolle die Identität

$$M_d = \lambda\left\{2\,\pi\,m_a\,r_a^3 - \frac{3\,\pi\,\mu\,b}{\beta^6}\left[(\beta^5\,r_a^{10/3} + 5\,\beta^4\,r_a^{8/3} + 20\,\beta^3\,r_a^2 + 60\,\beta^2\,r_a^{4/3} + 120\,\beta\,r_a^{2/3} + 120)\,e^{-\beta\,r_a^{2/3}}\right.\right.$$
$$\left.\left. - (\beta^5\,r_0^{10/3} + 5\,\beta^4\,r_0^{8/3} + 20\,\beta^3\,r_0^2 + 60\,\beta^2\,r_0^{4/3} + 120\,\beta\,r_0^{2/3} + 120)\,e^{-\beta\,r_0^{2/3}}\right]\right\}$$
$$= 2\,\pi\,r_0^2\,b\,e^{-\beta\,r_0^{2/3}}\,\lambda\left\{\frac{m_a\,r_a^3}{b\,r_0^2}\,e^{\beta\,r_0^{2/3}} - \frac{3\,\mu}{2\,\beta^6}\left[\frac{1}{r_0^2}\,(\beta^5\,r_a^{10/3} + 5\,\beta^4\,r_a^{8/3} + 20\,\beta^3\,r_a^2 + 60\,\beta^2\,r_a^{4/3}\right.\right.$$
$$+ 120\,\beta\,r_a^{2/3} + 120)\,e^{-\beta\,(r_a^{2/3} - r_0^{2/3})}$$
$$\left.\left. - (\beta^5\,r_0^{4/3} + 5\,\beta^4\,r_0^{2/3} + 20\,\beta^3 + 60\,\beta^2\,r_0^{-2/3} + 120\,\beta\,r_0^{-4/3} + 120\,r_0^{-2})\right]\right\}.$$

Zu bemerken ist wieder, daß in (54) der Ausdruck in der eckigen Klammer des zweiten Termes negativ, der zweite Summand in (54) also positiv ist. Die Konstante $\beta$ wird wieder wie beim ersten Exponentialprofil vom Verhältnis der Scheibendicken am Innen- und Außenhalbmesser der Scheibe gemäß der Formel[1]

$$\beta = \frac{\ln\dfrac{y_0}{y_a}}{r_a^{2/3} - r_0^{2/3}}, \tag{55}$$

abhängen, während der Vorfaktor $b$ dann wieder z. B. durch die Profildicke $y_0$ bestimmt ist.

*Zahlenbeispiel 6*: Wie beim Zahlenbeispiel 5 sei $r_0 = y_0 = 10$ cm, $r_a = 50$ cm, aber $y_a \sim 1$ cm, ferner $\lambda\,\mu = 4 \cdot 10^{-2}$ kp/cm⁴ und $G = 0{,}85 \cdot 10^6$ kp/cm². Dann erhält man zunächst aus (55) $\beta_1 = \dfrac{\ln 5}{50^{2/3} - 10^{2/3}} \doteq 0{,}258$; es wurde gewählt: $\beta_1 = 0{,}25$. Für den Vorfaktor $b$ ergibt sich dann

[1] Man vgl. *J. Malkin* a. a. O. S. 71, Gl. (86).

$b = 10 \cdot e^{0,25 \cdot 10^{2/3}} = 31{,}91202$ cm. Damit ergeben sich dann die in der zweiten Spalte der Tabelle 2 (linker Teil) angegebenen Werte der Funktion $y(r)$. Ferner findet man für den Ausdruck in der runden Klammer von (51 a) den Zahlenwert

$$A_2 = \beta^5 r_a^{10/3} + 5\,\beta^4 r_a^{8/3} + 20\,\beta^3 r_a^2 + 60\,\beta^2 r_a^{4/3} + 120\,\beta\, r_a^{2/3} + 120 = 3111{,}569438$$

und damit aus (51 a) mit $m_a = 0$ den Wert $D = -25693{,}8966$ kp.

Wie im Falle des Zahlenbeispiels 5 hat man von (52) und (53) die in der Tabelle 2 analog wie in der Tabelle 1 berechneten Teilfunktionen

$$\left.\begin{aligned} \tau_1(r) &= \frac{A_2}{r^2}\, e^{-\beta\,(r_a^{2/3} - r^{2/3})}\,,\\ \tau_2(r) &= -\,(\beta^5 r^{4/3} + 5\,\beta^4 r^{2/3} + 20\,\beta^3 + 60\,\beta^2 r^{-2/3}\\ &\quad + 120\,\beta\, r^{-4/3} + 120\, r^{-2})\,, \end{aligned}\right\}\ \tau(r) = -\frac{3\,\mu\,\lambda}{2\,\beta^6}\,[\tau_1(r) + \tau_2(r)]\,.$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(r) &= \frac{3}{2}\,\frac{D}{G}\,\beta^3\, r\,[J_2(u) - J_2(u_0)]\,,\\ v_2(r) &= \frac{3\,\lambda\,\mu}{2\,G\,\beta^6}\, r \left[\frac{3}{4}\,\beta^5\,(r^{4/3} - r_0^{4/3}) + \frac{15}{2}\,\beta^4\,(r^{2/3} - r_0^{2/3}) + 20\,\beta^3 \ln\frac{r}{r_0}\right.\\ &\quad \left. - 90\,\beta^2\,(r^{-2/3} - r_0^{-2/3}) - 90\,\beta\,(r^{-4/3} - r_0^{-4/3}) - 60\,(r^{-2} - r_0^{-2})\right], \end{aligned}\right\}\ v(r) = v_1(r) + v_2(r)\,.$$

Die Endergebnisse der Tabelle 2 sind in Abb. 8 dargestellt.

Die hier behandelten *Malkin*schen Exponentialprofile sind Spezialfälle allgemeiner Exponentialprofile von der Gleichung

$$y = b\, e^{-k\, r^n}, \tag{56}$$

die für $n = 2$ bei besonderen Randbedingungen wieder auf die in Abschnitt c) behandelten Scheiben gleicher Dehnungsfestigkeit zurückführt. Für allgemeinere Randbedingungen haben diesen Fall bereits *A. Fischer*[1] und *R. Gran Olsson*[2], letzterer auch die Fälle für $n = 1$ und $n = 4$ mittels der konfluenten hypergeometrischen Funktion behandelt und auch tabellarisch weitgehend unterbaut. Diese Profile und auch solche von parabolischer Querschnittsbegrenzung sollen in einer späteren Arbeit eingehend untersucht werden.

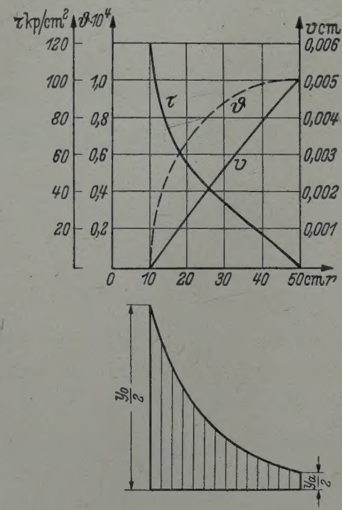


Abb. 8. Die Schubspannung $\tau$, die Azimutalverschiebung $v$ und der Azimutalwinkel $\vartheta$ gemäß Tabelle 2 für das zweite Exponentialprofil, sowie die halbe Profildicke.

**4. Weitere Profile, insbesondere das Profil gleicher Schubspannung $\tau_0$.** Man kann z. B. nach jenen Profilformen fragen, deren Schubspannung dem einfachen Gesetz

$$\tau = \tau_0 \cdot r^n \tag{57}$$

genügt. Die Betrachtung von Abb. 2, 3, 6 und 7 zeigt insbesondere, daß man Profilkonturen, die sich nach außen verjüngen, praktisch also brauchbar sind, für $n < 0$ zu erwarten haben wird. Führt man den Ansatz (57) in (2a, b) ein, so erhält man die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dr} + \left(\frac{2+n}{r} + \frac{\lambda\,\mu}{\tau_0}\, r^{1-n}\right) y = 0\,, \tag{58a}$$

$$\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{\tau_0}{G}\, r^n, \tag{58b}$$

die die folgenden Lösungen ergeben:

$$y = b\,\frac{1}{r^{2+n}}\, e^{-\frac{\mu\,\lambda}{(2-n)\,\tau_0}\, r^{2-n}}, \tag{59a}$$

$$v = E\, r + \frac{\tau_0}{n\,G}\, r^{n+1}\,. \tag{59b}$$

Hierin bedeuten $b$ und $E$ die beiden Integrationskonstanten.

[1] *A. Fischer*, Z. öst. Ing. u. Arch.-Ver. 74 (1922) S. 46. Man vgl. auch *T. Suhara*, Trans. Soc. mech. Engrs. Japan 3 (1937) Nr. 10, S. 1.

[2] *R. Gran Olsson*, Ing.-Arch. 8 (1937), S. 270 und S. 373.

Aus (59b) erkennt man, daß auch für die Azimutalverschiebung $v$ Ansätze gemäß (57) zu Profilformen nach Art (59a) führen werden. Aus (57) gewinnt man eine konstante Schubspannung $\tau_0$ für $n = 0$, und damit erhält man aus (59a) als Gleichung der Kontur $y(r)$ für ein solches Profil

$$y = \frac{b}{r^2} e^{-\frac{\lambda \mu}{2 \tau_0} r^2} = \frac{b}{r^2} e^{-\frac{\gamma \lambda}{2 g \tau_0} r^2}. \tag{60}$$

Wegen des Vorfaktors $b/r^2$ verjüngen sich also Profile konstanter Schubspannung, selbst wenn $\lambda = \omega^2$ und $\tau_0 = \sigma_0$ ist, rascher als solche konstanter Dehnungsspannung $\sigma_0$. (Man vgl. Unterabschnitt 3c.)

Läßt man die Massenkräfte außer acht und denkt sich die Schubspannung $\tau_0$ etwa auf statischem Wege durch ein Drehmoment erzeugt, so folgt aus (60) mit $\mu \lambda = 0$

$$y = \frac{b}{r^2},$$

somit also das von *R. Grammel*[1] für diesen Fall bereits gefundene hyperbolische Profil. Bei allgemeineren Profilen, wie z. B. dem *Grammel*schen Profil[2] wird man, wie hier bemerkt werden möge, bei der Schub- und Verformungsberechnung i. a. geschlossene Formeln kaum erwarten und daher Quadraturen nicht umgehen können. Das Verhalten dieses Profils und weiterer Profile, die etwa aus dem *Grammel*schen Umkehrproblem gewonnen worden sind[3], gegenüber axialen Drehmomenten soll Gegenstand einer späteren Untersuchung sein.

(Eingegangen am 26. Januar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Karl Karas*, Darmstadt-Eberstadt,
Carlo Mierendorffstraße 38.

[1] Man vgl. die in Fußnote 1 Seite 63 angegebene Literatur, insbesondere *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 194, Abschn. 1: Scheibendrillung; und *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 7, Gl. (7).

[2] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 7 (1936), S. 137, insbesondere Gleichung (9).

[3] A. *Held*, Ing.-Arch. 10 (1939), S. 339.

# Technische Schwingungslehre

Von Dr.-Ing. Karl Klotter
o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt

Zweite, umgearbeitete und ergänzte Auflage

Zweiter Band

## Schwinger von mehreren Freiheitsgraden (Mehrläufige Schwinger)

Mit 296 Abbildungen. XVI, 483 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 58,50

INHALTSÜBERSICHT

Behandlung unter allgemeinen und systematischen Gesichtspunkten: Die Schwinger und ihre Elemente; die Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Freie Schwingungen ungedämpfter Systeme von zwei Freiheitsgraden. Freie ungedämpfte Schwingungen der Gebilde von mehr als zwei Freiheitsgraden. Autonome Differentialgleichungen. Bewegungen von Gebilden mit Dämpfung, Anfachung und allgemeiner Form der Kopplung. Erzwungene Schwingungen · Behandlung unter technischen und praktischen Gesichtspunkten; Rationelle Verfahren zur Berechnung kritischer Drehzahlen: Torsionsschwingungen von Kurbelwellen. Schwingungsberechnung mit Hilfe von Übertragungsmatrizen · Anhang: Eigenfrequenzen · Namen- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Dieser zweite Band des Werkes behandelt die Schwingungen der Gebilde mit mehreren Freiheitsgraden, die sogenannten Koppelschwingungen. Das Buch will kein Handbuch, sondern ein Lehrbuch sein, und zwar eines, das sowohl Anfängern wie Fortgeschrittenen dient; deshalb ist der Stoff nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet. In allen Teilen des Buches werden die Anwendungen der Schwingungen, vor allem im Maschinenwesen, im Bauwesen und bei Fahrzeugen im Auge behalten. Darüber hinaus ist der zweite Teil des Bandes ausschließlich den Methoden gewidmet, die erforderlich sind zur praktischen Berechnung von Torsions- und Biegeschwingungen sowie der zugehörigen kritischen Drehzahlen der Maschinenwellen, wenn man diese Rechnung auf realistischen Voraussetzungen aufbauen will.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 1,1 K. B./Z. 040.